

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS Y TEORÍA DE
ESTRUCTURAS



**VIBRACIONES EN VIGAS CON
AMORTIGUAMIENTOS INTERNO Y
EXTERNO**

TRABAJO FIN DE GRADO

Autor: Carlos Rey Mancebo

Tutor: Sergio González López

Julio de 2013

Vibraciones en vigas con amortiguamientos interno y externo

Cláusula de salvaguarda:

Este Trabajo Fin de Grado tiene un propósito exclusivamente académico, que se concreta en probar la capacidad de su autor para hacer aplicación y síntesis de los conceptos y técnicas aprendidos durante la realización de los estudios tendentes a la obtención del Título de Graduado en Ingeniería Mecánica de acuerdo a los requisitos de la UC3M. Por dicho motivo, no se autoriza su utilización por personal ajeno a la realización del mismo, no haciéndose ni su autor ni su director o tutor, responsables de los daños y perjuicios directos o indirectos que pudiera ocasionar la aplicación de los conceptos, técnicas, metodologías y/o resultados en él contenidos.

Vibraciones en vigas con amortiguamientos interno y externo

Agradecimientos:

En primer lugar quisiera agradecer a mi familia la oportunidad de poder llegar hasta aquí, con su apoyo y consejos a lo largo de mi vida.

Por otro lado agradecer la ayuda y el apoyo recibido por mi tutor del TFG, Sergio González López, el cual me permitió realizar

También agradecer a mis amigos de toda la vida, los que me han ayudado desde el principio a seguir luchando por lo que uno quiere y conseguirlo.

A los que empezamos siendo compañeros de la universidad, que después de horas y horas por aulas, bibliotecas, exámenes y también algo de césped, son amigos que se quedarán

Y a Belén que porque tu apoyo al final de este trayecto ha sido clave para finalizar.

Gracias.

Índice

1	Introducción y objetivos	11
1.1	Introducción	11
1.2	Objetivos	11
1.3	Contenido del documento	12
2	Viscoelasticidad.....	13
2.1	Concepto de viscoelasticidad.....	13
2.2	Tipos de ensayos viscoelásticos.....	16
2.2.1	Ensayo de fluencia.....	16
2.2.2	Ensayo de relajación.....	17
2.2.3	Ensayo mixto	18
2.2.4	Ensayo cíclico.....	19
2.3	. Diferentes tipos de comportamiento de un material	20
2.3.1	. Fluido viscoso.....	20
2.3.2	. Sólidos elásticos	20
2.3.3	. Sólidos plásticos	22
2.3.4	. Sólidos viscoplásticos.....	24
2.4	. Modelos viscoelásticos	25
2.4.1	. Modelo de Maxwell.....	27
2.4.2	. Modelo de Kelvin-Voigt.....	29
2.4.3	. Otros modelos de resortes y amortiguadores.....	31
2.5	. Integrales Hereditarias	31
3	. Dinámica de vigas	34
3.1	. Introducción a la dinámica de vigas	34
3.2	. Vigas con amortiguamiento viscoelástico	40
4	. Vigas con amortiguamiento no local.....	42
4.1	. Desarrollo del problema.....	42
4.2	. Función de amortiguamiento: casos particulares.....	43
4.2.1	. Amortiguamiento viscoso local.....	43
4.2.2	. Amortiguamiento viscoelástico local	44
4.2.3	. Amortiguamiento viscoso no local.....	44
4.3	. Función de Kernel espacial.....	44
4.3.1	. Decrecimiento exponencial	45

4.3.2	. Función error	45
4.3.3	. Función escalón	46
4.3.4	. Función triangular	47
4.4	. Función de relajación	47
5	. Método de resolución de la ecuación de movimiento	49
5.1	. La Transformada de Laplace	49
5.2	. Método de Galerkin	50
6	. Casos numéricos	54
6.1	. Introducción y datos	54
6.2	. Caso 1: Viga biapoyada	57
6.2.1	. Modos propios no amortiguados	57
6.2.2	. Solución del problema	57
6.2.3	. Influencia de N	60
6.2.4	. Influencia de H_0	62
6.2.5	. Influencia de α	63
6.2.6	. Influencia de μ	65
6.2.7	. Influencia de γ_0	66
6.2.8	. Influencia de x_1	67
6.2.9	. Influencia de (x_2-x_1)	68
6.2.10	. Influencia de L	68
6.2.11	. Influencia de l	69
6.2.12	. Influencia de E	70
6.2.13	. Influencia de ρ	70
6.3	. Caso 2: Viga empotramiento-extremo libre	72
6.3.1	. Modos propios no amortiguados	72
6.3.2	. Solución del problema	73
6.3.3	. Influencia de N	75
6.3.4	. Influencia de H_0	76
6.3.5	. Influencia de α	77
6.3.6	. Influencia de μ	79
6.3.7	. Influencia de γ_0	80
6.3.8	. Influencia de x_1	80
6.3.9	. Influencia de (x_2-x_1)	81

6.3.10	Influencia de L	82
6.3.11	Influencia de l	82
6.3.12	Influencia de E	83
6.3.13	Influencia de ρ	84
6.4	. Caso 3: Viga empotramiento-apoyo	85
6.4.1	. Modos propios no amortiguados	85
6.4.2	. Solución del problema	86
6.4.3	Influencia de N	88
6.4.4	Influencia de H_0	89
6.4.5	Influencia de α	90
6.4.6	Influencia de μ	91
6.4.7	Influencia de γ_0	92
6.4.8	Influencia de x_1	92
6.4.9	Influencia de (x_2-x_1)	93
6.4.10	Influencia de L	94
6.4.11	Influencia de l	94
6.4.12	Influencia de E	95
6.4.13	Influencia de ρ	96
6.5	. Caso 4: Viga biempotrada.....	97
6.5.1	. Modos propios no amortiguados	97
6.5.2	. Solución del problema	98
6.5.3	Influencia de N	100
6.5.4	Influencia de H_0	100
6.5.5	Influencia de α	102
6.5.6	Influencia de μ	103
6.5.7	Influencia de γ_0	104
6.5.8	Influencia de x_1	104
6.5.9	Influencia de (x_2-x_1)	105
6.5.10	Influencia de L	106
6.5.11	Influencia de l	106
6.5.12	Influencia de E	107
6.5.13	Influencia de ρ	107
6.6	. Comparación de resultados.....	108

Vibraciones en vigas con amortiguamientos interno y externo

6.6.1	. Comportamiento del amortiguador: $H_0, \alpha, \mu, \gamma_0$	108
6.6.2	Comportamiento en la geometría: $x_1, (x_2-x_1), L, l$	112
6.6.3	. Comportamiento del material: E, ρ	114
7	. Conclusiones.....	116
8	Lineas futuras de investigación	117
9	Bibliografía.....	118

Índice de imágenes

Figura 2.1 Representación de la ley de Hooke	13
Figura 2.2 Representación de la ley de Newton	14
Figura 2.3: Ensayo de fluencia	16
Figura 2.4: Ensayo de relajación	17
Figura 2.5: Ensayo mixto	18
Figura 2.6: Ensayo Cíclico	19
Figura 2.7: Comportamiento de un fluido-viscoso	20
Figura 2.8: Comportamiento de un sólido elástico perfecto.....	21
Figura 2.9: Comportamiento de un sólido viscoelástico	21
Figura 2.10: Comportamiento de un sólido rígido perfectamente plástico	22
Figura 2.11: Comportamiento sólido perfectamente plástico.....	23
Figura 2.12: Comportamiento de un sólido perfectamente viscoplástico.....	24
Figura 2.13: Comportamiento de un sólido elástico perfectamente viscoplástico	25
Figura 2.14: Modelo de material elástico	26
Figura 2.15: Modelo de material viscoso	26
Figura 2.16: Modelo de Maxwell	27
Figura 2.17: Modelo de Kelvin.....	29
Figura 2.18: Salto infinito en la tensión aplicada	32
Figura 4.1: Función de Kernel: Decrecimiento exponencial	45
Figura 4.2: Función de Kernel: Función error	46
Figura 4.3: Función de Kernel: Función error	46
Figura 4.4: Función de Kernel: Función triangular	47
Figura 4.5: Función de relajación	48
Figura 6.1 Ejemplo que justifica la definición de η	55
Figura 6.2 Desplazamiento del punto medio para la viga biapoyada.....	59
Figura 6.3 Influencia de los términos 2 a 5 al desplazamiento en $x=L/2$	60
Figura 6.4 Capacidad de amortiguación en función de H_0 externo	62
Figura 6.5 Capacidad de amortiguamiento en función de H_0 interno	63
Figura 6.6: Capacidad de amortiguamiento en función de α_e	64
Figura 6.7: Capacidad de amortiguamiento en función de α_i	64
Figura 6.8 Capacidad de amortiguamiento en función de μ_e	65
Figura 6.9: Capacidad de amortiguamiento en función de μ_i	66
Figura 6.10: Capacidad de amortiguamiento en función de γ_0	66
Figura 6.11: Capacidad de amortiguamiento en función de x_1	67
Figura 6.12: Capacidad de amortiguamiento en función de (x_2-x_1)	68
Figura 6.13: Capacidad de amortiguamiento en función de L	69
Figura 6.14: Capacidad de amortiguamiento en función de l	69
Figura 6.15: Capacidad de amortiguamiento en función de E	70
Figura 6.16: Capacidad de amortiguamiento en función de ρ	71
Figura 6.17: Desplazamiento del punto medio para la viga empotramiento-libre	74
Figura 6.18: Influencia de los términos N 2 a 3 en $x=L/2$	75

Vibraciones en vigas con amortiguamientos interno y externo

Figura 6.19: Capacidad de amortiguamiento en función de H_0 externo.....	76
Figura 6.20: Capacidad de amortiguamiento en función de H_0 interno.....	77
Figura 6.21: Capacidad de amortiguamiento en función de α_e	78
Figura 6.22: Capacidad de amortiguamiento en función de α_i	78
Figura 6.23: Capacidad de amortiguamiento en función de μ_e	79
Figura 6.24: Capacidad de amortiguamiento en función de μ_i	79
Figura 6.25: Capacidad de amortiguamiento en función de γ_0	80
Figura 6.26: Capacidad de amortiguamiento en función de x_1	81
Figura 6.27: Capacidad de amortiguamiento en función de (x_2-x_1)	81
Figura 6.28: Capacidad de amortiguamiento en función de L	82
Figura 6.29: Capacidad de amortiguamiento en función de l	83
Figura 6.30: Capacidad de amortiguamiento en función de E	83
Figura 6.31: Capacidad de amortiguamiento en función de ρ	84
Figura 6.32: Desplazamiento del punto medio para la viga empotramiento-apoyo	87
Figura 6.33: Influencia de los términos N 2 a 4 en $x=L/2$	88
Figura 6.34: Capacidad de amortiguamiento en función de H_0 externo.....	89
Figura 6.35: Capacidad de amortiguamiento en función de H_0 interno	89
Figura 6.36: Capacidad de amortiguamiento en función de α_e	90
Figura 6.37: Capacidad de amortiguamiento en función de α_i	90
Figura 6.38: Capacidad de amortiguamiento en función de μ_e	91
Figura 6.39: Capacidad de amortiguamiento en función de μ_i	91
Figura 6.40: Capacidad de amortiguamiento en función de γ_0	92
Figura 6.41: Capacidad de amortiguamiento en función de x_1	93
Figura 6.42: Capacidad de amortiguamiento en función de (x_2-x_1)	93
Figura 6.43: Capacidad de amortiguamiento en función de L	94
Figura 6.44: Capacidad de amortiguamiento en función de l	95
Figura 6.45: Capacidad de amortiguamiento en función de E	95
Figura 6.46: Capacidad de amortiguamiento en función de ρ	96
Figura 6.47: Desplazamiento del punto medio para la viga biempotrada	99
Figura 6.48: Influencia de los términos N 2 a 3 en $x=L/2$	100
Figura 6.49: Capacidad de amortiguamiento en función de H_0 externo	101
Figura 6.50: Capacidad de amortiguamiento en función de H_0 interno	101
Figura 6.51: Capacidad de amortiguamiento en función de α_e	102
Figura 6.52: Capacidad de amortiguamiento en función de α_i	102
Figura 6.53: Capacidad de amortiguamiento en función de μ_e	103
Figura 6.54: Capacidad de amortiguamiento en función de μ_i	103
Figura 6.55: Capacidad de amortiguamiento en función de γ_0	104
Figura 6.56: Capacidad de amortiguamiento en función de x_1	105
Figura 6.57: Capacidad de amortiguamiento en función de (x_2-x_1)	105
Figura 6.58: Capacidad de amortiguamiento en función de L	106
Figura 6.59: Capacidad de amortiguamiento en función de l	106
Figura 6.60: Capacidad de amortiguamiento en función de E	107
Figura 6.61: Capacidad de amortiguamiento en función de ρ	107
Figura 6.62: Comparación del parámetro H_0 externo	108

Figura 6.63: Comparación del parámetro H_0 interno	109
Figura 6.64: Comparación del parámetro αe	109
Figura 6.65: Comparación del parámetro αi	110
Figura 6.66: Comparación del parámetro μe	110
Figura 6.67: Comparación del parámetro μi	111
Figura 6.68: Comparación del parámetro γ_0	111
Figura 6.69: Comparación del parámetro x_1	112
Figura 6.70: Comparación del parámetro (x_2-x_1)	113
Figura 6.71: Comparación del parámetro L	113
Figura 6.72: Comparación del parámetro l	114
Figura 6.73: Comparación del parámetro E	114
Figura 6.74: Comparación del parámetro ρ	115

1 Introducción y objetivos

1.1 Introducción

El análisis de estructuras con amortiguamiento es de gran importancia en ámbitos tales como la ingeniería mecánica, aeroespacial y civil, por ejemplo las vibraciones que puede tener un edificio con la acción de un terremoto, o los elementos aeroespaciales pertenecientes a una aeronave.

Una vibración se puede definir como el movimiento de una película o de un cuerpo que oscila alrededor de una posición de equilibrio, donde el tiempo que tarda en efectuar un ciclo completo es el periodo, y el número de ciclos por unidad de tiempo la frecuencia.

La mayor parte de estas vibraciones son dañinas y perjudiciales para las estructuras, porque generan esfuerzos y tensiones, por tanto también pérdidas de carga acompañadas de estos. Además, son una fuente de desgaste de materiales, de daños por fatiga y de movimientos.

Para poder contrarrestar estas vibraciones existen los materiales amortiguadores como es el caso de un material viscoelástico, los cuales se presentan generalmente en forma de amortiguadores viscoelásticos y de acero combinados con láminas de goma. El comportamiento de estos materiales tiende a acumular elásticamente parte de la energía de deformación y disipa el resto a través de las fuerzas viscosas.

Estos tipos de amortiguamiento se usan en la construcción de edificios para sobretodo reducir las vibraciones que pueden ocasionarse por vientos en edificios altos, aunque se han probado contra la acción sísmica obteniendo muy buenos resultados, ya que actúa de tal manera que utiliza la deformación del material viscoelástico para absorber la energía y de esta forma reducir las vibraciones.

1.2 Objetivos

Este proyecto tiene como objetivo el análisis de vigas recubiertas de una capa de amortiguamiento viscoelástico, y analizar la capacidad de amortiguación en distintos tipos de vigas: viga biapoyada, viga con un extremo empotrado y el otro libre, viga con los extremos uno empotrado y el otro apoyado, y viga biempotrada.

Para ello primero se debe introducir la viscoelasticidad, que se expondrá a continuación con el propósito de facilitar conocer cómo actúa el recubrimiento de la viga.

Se enumerarán las condiciones de contorno de las vigas así como sus características, por tanto será necesario realizar un análisis dinámico preliminar.

Se hallará la ecuación del movimiento de la viga amortiguada que se resolverá a través del método de la Transformada de Laplace y Galerkin, con los que se obtendrán los desplazamientos de las vigas, que se utilizarán para el análisis de estas.

Por último se hará un análisis de distintos casos prácticos, en los cuales se variarán los distintos parámetros con la intención de conocer su influencia en la capacidad de amortiguamiento.

Finalmente se hará una comparación de los distintos tipos de vigas según el análisis paramétrico realizado en capítulos anteriores.

1.3 Contenido del documento

El trabajo realizado se dividirá en los siguientes capítulos:

- 1. Introducción y objetivos:** se realizará una breve introducción al tema tratado en el proyecto, además se dejarán claros los objetivos a cumplir en el mismo.
- 2. Viscoelasticidad:** se introducirá la viscoelasticidad describiendo ensayos para poder describir materiales viscoelásticos, y sus comportamientos.
- 3. Dinámica de vigas:** se expondrán las condiciones de contorno posibles para una viga, además se calcularán los modos propios de las mismas.
- 4. Vigas con amortiguamiento no local:** se planteará la ecuación del movimiento.
- 5. Método de resolución de la ecuación del movimiento:** se procederá a resolver la ecuación del movimiento.
- 6. Casos numéricos:** se analizarán distintos casos en los que se variarán los parámetros de la ecuación del movimiento.
- 7. Conclusiones:** se expondrán a las conclusiones obtenidas del análisis
- 8. Líneas futuras de investigación:** se explicará por dónde se debe investigar sobre el tema tratado, para conseguir distintos resultados.
- 9. Bibliografía:** se citarán los distintos documentos que se han utilizado para la realización del trabajo.

2 Viscoelasticidad

2.1 Concepto de viscoelasticidad

La teoría clásica de la elasticidad considera propiedades mecánicas de los sólidos elásticos de acuerdo con las leyes de Hooke generalizadas, es decir, a partir de una tensión podemos determinar las deformaciones producidas (figura 2.1):

$$\sigma = f(\varepsilon) \quad (2.1)$$

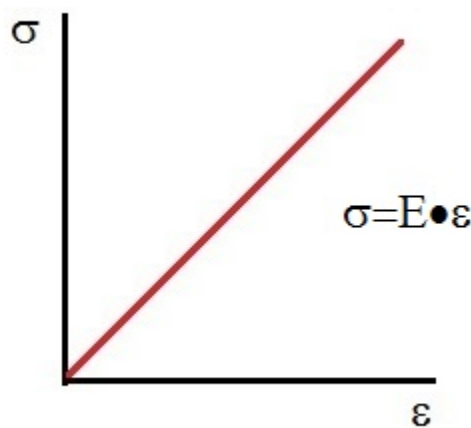


Figura 2.1 Representación de la ley de Hooke

Por otra parte, la Mecánica de Fluidos trata las propiedades de los fluidos viscosos para los que, de acuerdo con la ley de Newton, la tensión de cortadura aplicada es directamente proporcional a la velocidad de deformación, pero independiente de la deformación misma (figura 2.2):

$$\sigma = f(\dot{\varepsilon}) \quad (2.2)$$

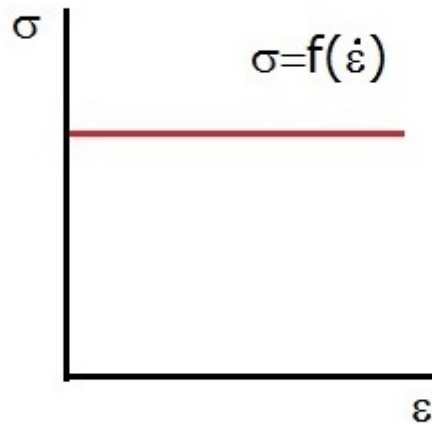


Figura 2.2 Representación de la ley de Newton

Estas dos leyes están idealizadas, aunque el comportamiento de muchos sólidos se aproxima a la ley de Hooke (elástico) en deformaciones infinitesimales, por otra parte la mayoría de líquidos se acerca al modelo de Newton para una velocidad de deformación baja.

De esta manera, si se aplica un estado de cargas sobre un sólido elástico, se deforma hasta que la carga aplicada cesa y su deformación volverá al valor inicial. Por otra parte, si a un fluido viscoso se le aplica un esfuerzo éste se deformará, de tal manera que no recupera su forma inicial.

En una posición intermedia a ambas están los materiales con comportamiento viscoelástico. Estos materiales tienen la propiedad de que al aplicarles una carga, además de una deformación instantánea sufren una deformación diferida, creciente en el tiempo.

$$\sigma = f(\epsilon, \dot{\epsilon})$$

(2.3)

Un parámetro usado para determinar o clasificar de forma específica sustancias de acuerdo a su carácter elástico, viscoso o viscoelástico es el *número de Deborah*, De , que es un número adimensional utilizado en reología para caracterizar cuánto de fluido es un material. El profesor Markus Reinen le dio nombre por la frase de la Biblia: “*Las montañas fluyeron delante del Señor*”. Este número se define como:

$$De = \frac{\tau}{t}$$

(2.4)

Donde τ es el tiempo de relajación característico del material, el cual es infinito para un sólido elástico y cero para un fluido viscoso (el del agua es del orden de 10^{-12} s); y t es un tiempo característico del proceso de deformación al que se ve sometido el material. De esta manera podemos clasificar los materiales:

$De \ll 1$: Comportamiento viscoso.

$De \approx 1$: Comportamiento viscoelástico.

$De \gg 1$: Comportamiento elástico.

Según la definición de *número de Deborah* todas las sustancias pueden fluir, solo se debe esperar el tiempo necesario. De esta manera, un material puede comportarse como un sólido de Hooke si se tiene un tiempo de relajación muy grande o si se le somete a un proceso de deformación en un tiempo muy bajo.

Unos de los materiales viscoelásticos más comunes son la mayoría de polímeros, los tiempos de relajación de los más utilizados son: PVC (30 s), LDPE (6 s), PET (2 s) o PS (1 s). Se debe tener en cuenta que durante su procesamiento la deformación es aplicada hasta que se consigue la forma deseada en tiempos del orden de varios segundos o minutos, con esto proporciona números de Deborah cercanos o del orden de la unidad. Otros ejemplos de estos materiales son: metales a alta temperatura, hormigón y los suelos sometidos a las acciones dinámicas.

2.2 Tipos de ensayos viscoelásticos

Existen varios ensayos para definir los materiales viscoelásticos. Algunos ejemplos son: ensayo de fluencia y relajación, ensayo mixto y ensayo cíclico.

2.2.1 Ensayo de fluencia

Se basa en someter a una probeta a una tensión constante (σ_0) en el tiempo y observar como varia la deformación en función del tiempo (figura 2.3).

Se define como Función de fluencia, $J(t)$, al valor de la deformación en función del tiempo en un ensayo de fluencia para una tensión constante y unitaria que se aplica rápidamente y se mantiene en el tiempo.

$$\sigma_0 = 1 \rightarrow J(t) \equiv \varepsilon(t)$$

(2.5)

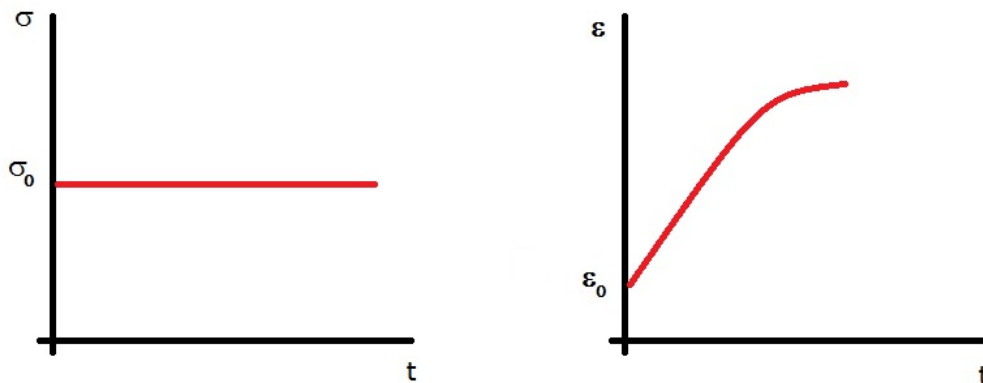


Figura 2.3: Ensayo de fluencia

La definición puede ser generalizada a un ensayo de fluencia con tensión aplicada (σ_0), utilizándola con un valor no necesariamente unitario.

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}$$

(2.6)

Se puede observar en la expresión anterior que la función de fluencia tendría unas unidades de Pa^{-1} en el Sistema Internacional de Unidades.

2.2.2 Ensayo de relajación.

Consiste en mantener la deformación constante (ε_0) a una probeta y medir cómo varía la tensión en función del tiempo (figura 2.4).

Se define como Modulo de Relajación, $Y(t)$, al valor de la tensión en función del tiempo en un ensayo de relajación con deformación unitaria que se aplica rápidamente.

$$\varepsilon_0 = 1 \rightarrow Y(t) \equiv \sigma(t)$$

(2.7)

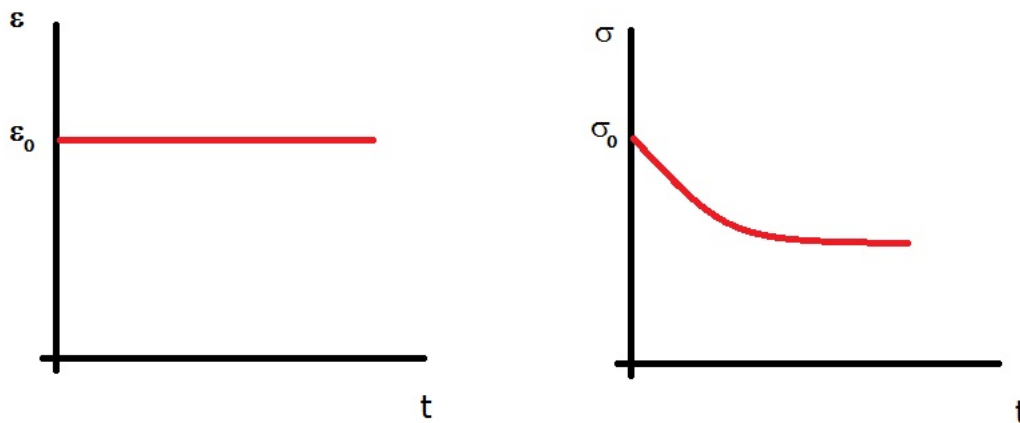


Figura 2.4: Ensayo de relajación

La definición puede ser generalizada a un ensayo de relajación con deformación aplicada no necesariamente unitaria.

$$Y(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}$$

(2.8)

En este caso el Módulo de relajación se expresa en Pa en el Sistema Internacional de Unidades.

2.2.3 Ensayo mixto

Este método consiste en la sucesiva aplicación de ensayos de relajación. También se denomina ensayo de relajación múltiple (figura 2.5).

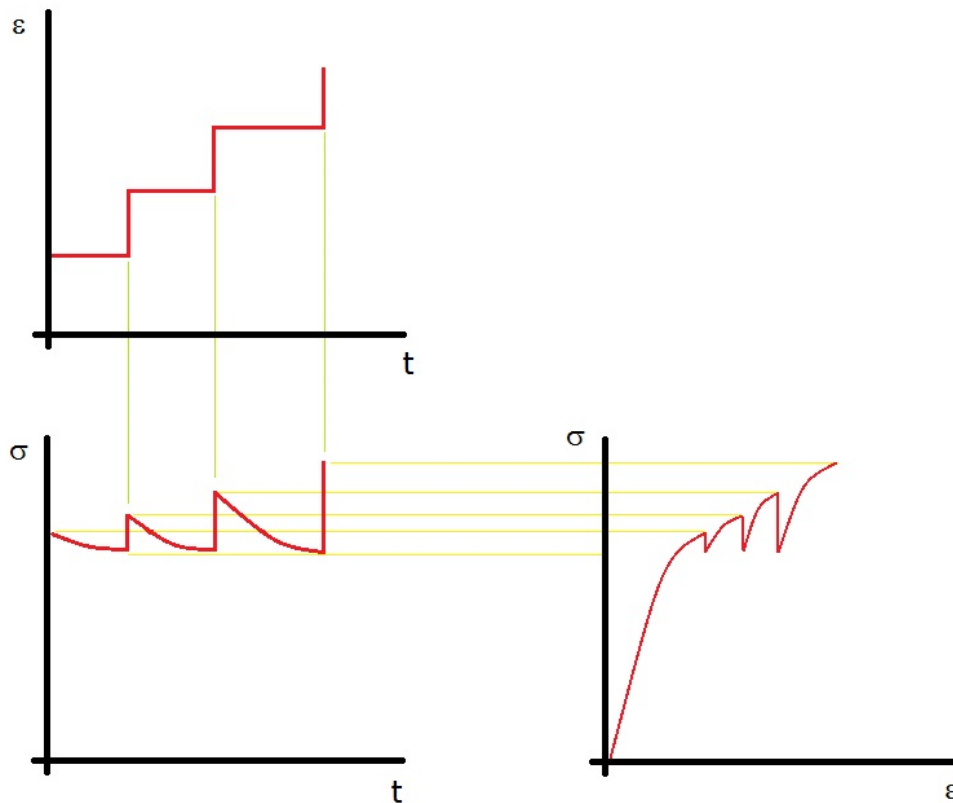


Figura 2.5: Ensayo mixto

2.2.4 Ensayo cíclico

Consiste en someter a la probeta a esfuerzos periódicos, en general la respuesta cíclica tiende a estabilizarse al cabo de un cierto tiempo (figura 2.6).

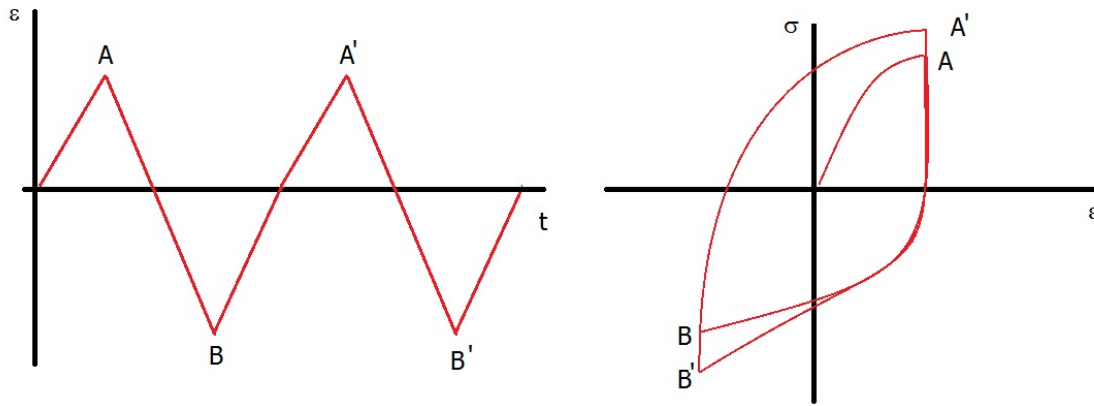


Figura 2.6: Ensayo Cíclico

2.3 . Diferentes tipos de comportamiento de un material

2.3.1. Fluido viscoso

Forma el primer grupo de materiales. Un material es fluido-viscoso cuando responde a un ensayo tensión-deformación de fluencia y relajación como indican las siguientes gráficas (figura 2.7).

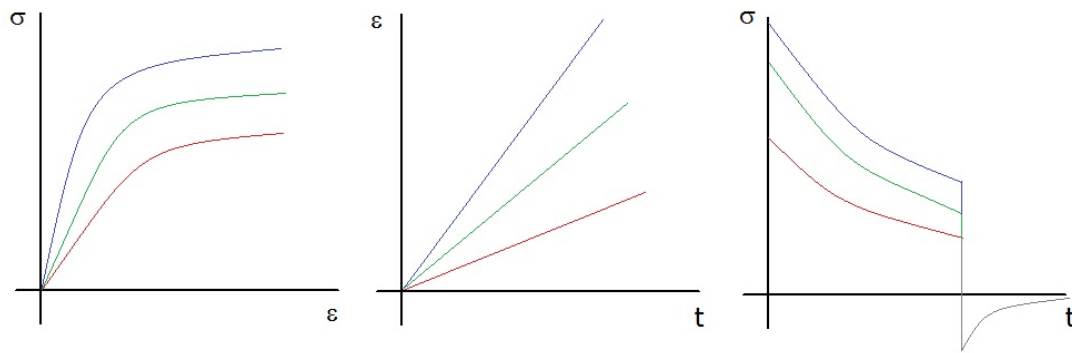


Figura 2.7: Comportamiento de un fluido-viscoso

Este tipo de comportamiento se encuentra en: termoplásticos que estén cerca de su temperatura de fusión, así como los metales también cercanos a su punto de fusión, además del hormigón fresco, siempre y cuando este no haya endurecido.

2.3.2. Sólidos elásticos

Forman el segundo grupo de materiales, incluyendo los lineales y los no lineales. Son aquellos que ante un esfuerzo exterior se deforman y recuperan su forma primitiva al cesar la causa de la deformación.

2.3.2.1 . Sólido elástico perfecto

Son aquellos que cumplen la ley de Hooke, las tensiones son proporcionales a las deformaciones (Figura 2.8).

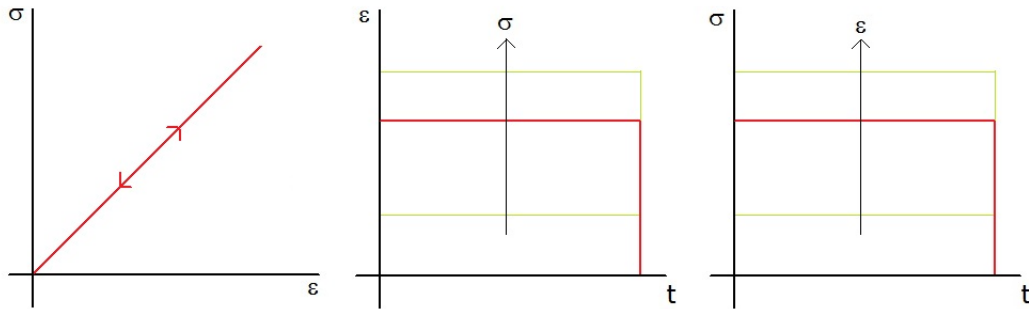


Figura 2.8: Comportamiento de un sólido elástico perfecto

Este comportamiento es típico de metales, rocas, y del hormigón.

2.3.2.2 . Sólido viscoelástico

Estos sólidos no tienen comportamiento plástico, es decir, la reversibilidad de la deformación está retardada y depende del tiempo. La viscosidad del material es causa de que la deformación no se alcance instantáneamente, luego, es un modelo más realista (figura 2.9).

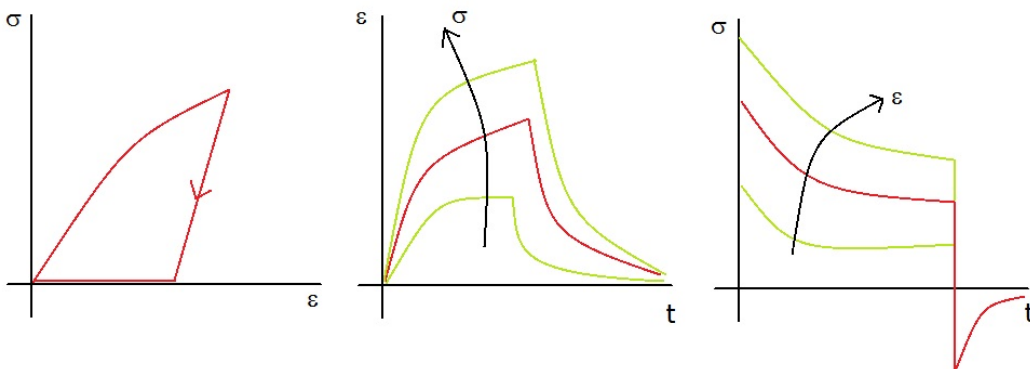


Figura 2.9: Comportamiento de un sólido viscoelástico

2.3.3. Sólidos plásticos

Son materiales que sometidos a una carga se deforman, una vez es retirada la carga el sólido no vuelve exactamente a su forma inicial, por lo cual son irreversibles.

2.3.3.1 . Sólido rígido perfectamente plástico

Si la tensión es igual a la del límite elástico, la deformación no está definida y puede ser cualquiera, lo mismo ocurre con la tensión. El hecho de deformarse no se considera que consiga endurecimiento por deformación (figura 2.10).

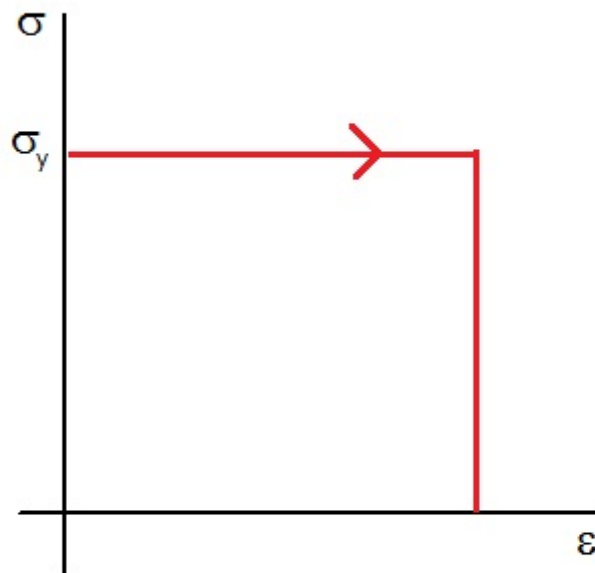


Figura 2.10: Comportamiento de un sólido rígido perfectamente plástico

$$|\sigma| < \sigma_y \rightarrow \varepsilon \approx 0$$

(2.9)

$$\sigma = \sigma_y \rightarrow \varepsilon = \text{arbitrario}$$

(2.10)

Este tipo de comportamiento es aplicable a la mecánica de suelos o el conformado de metales.

2.3.3.2 . Sólido elástico perfectamente plástico

Este comportamiento es menos frecuente, e implica la aparición de deformaciones irreversibles por pequeñas que sea la tensión aplicada, en este caso la deformación tendrá un valor inicial dependiendo de la tensión (figura 2.11).

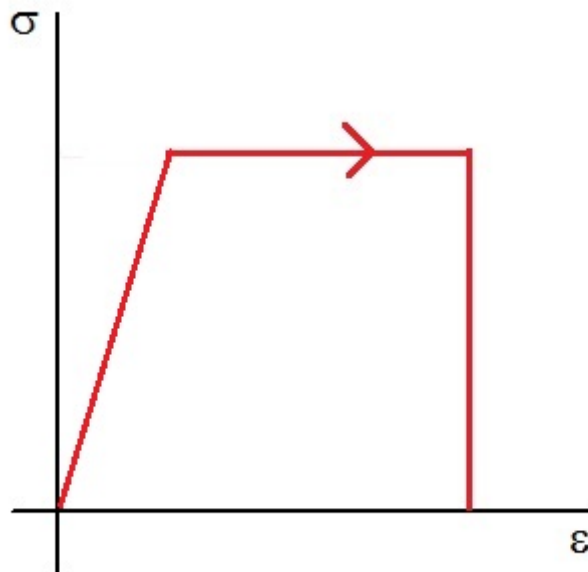


Figura 2.11: Comportamiento sólido perfectamente plástico

$$|\sigma| < \sigma_y \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (2.11)$$

$$\sigma = \sigma_y \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \text{arbitrario} \quad (2.12)$$

Los aceros son materiales que se comportan de esta manera

2.3.4. Sólidos viscoplásticos

Conforman el cuarto grupo de materiales.

2.3.4.1 . Sólido perfectamente viscoplástico

Comportamiento que sigue la ley de Norton cuyo enunciado es el siguiente:

$$\sigma = \lambda \cdot \dot{\varepsilon}^{1/N} \quad (2.13)$$

Donde N y λ son parámetros que dependen del material (figura 2.12).

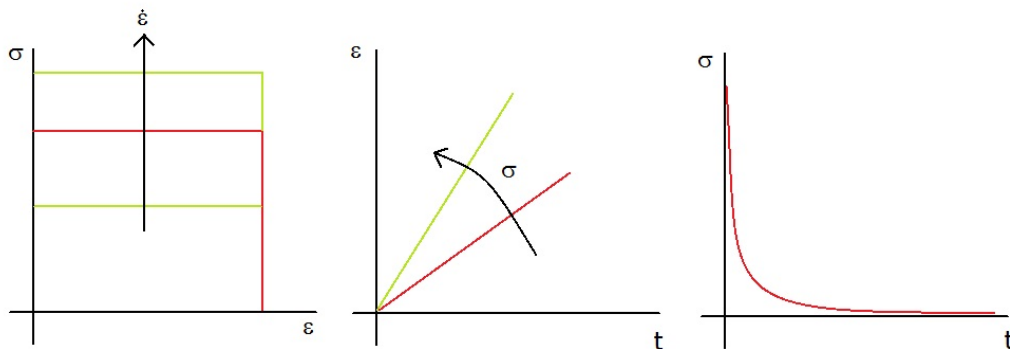


Figura 2.12: Comportamiento de un sólido perfectamente viscoplástico

2.3.4.2 . Sólido elástico perfectamente viscoplástico

Comportamiento plástico que se representa como una recta horizontal, siendo en esta zona donde se consigue el comportamiento viscoso.

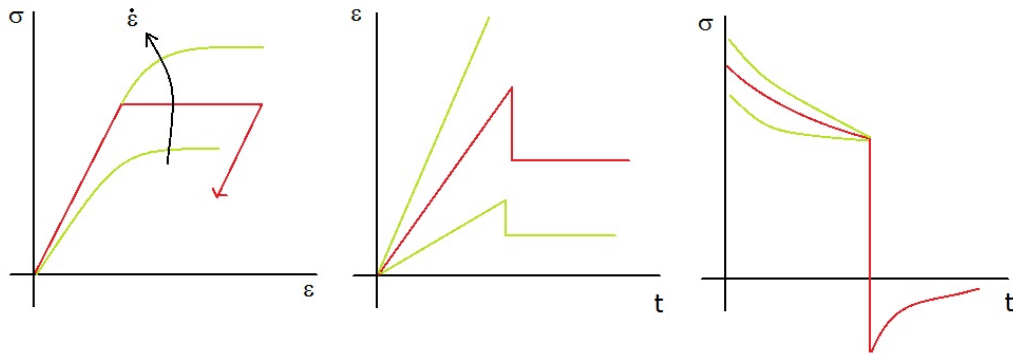


Figura 2.13: Comportamiento de un sólido elástico perfectamente viscoplástico

2.4 . Modelos viscoelásticos

Ya que el comportamiento reológico de materiales viscoelásticos es complicado de visualizar, lo que se suele emplear son modelos mecánicos para su representación.

En estos modelos se suele representar el comportamiento de un fluido de Newton como un amortiguador, mientras que para un comportamiento elástico de un sólido de Hooke es representado a través de un resorte. El amortiguador representa la disipación de energía en forma de calor, a su vez el resorte lo que representa es la energía almacenada en su cuerpo. Con el amortiguador la tensión aplicada es independiente de la deformación, todo lo contrario de lo que ocurre en el resorte, ya que el módulo E es la constante de proporcionalidad entre la tensión y la deformación.

Para el material elástico se utiliza el resorte y para el fluido viscoso el amortiguador:

$$F = k \cdot u \rightarrow \sigma = E \varepsilon$$

(2.14)

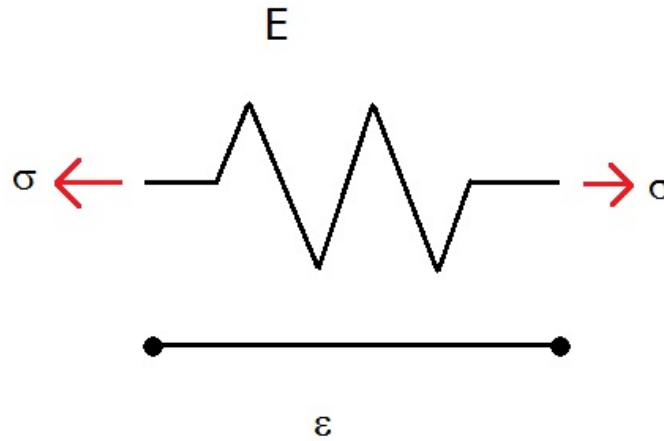


Figura 2.14: Modelo de material elástico

$$F = c \cdot \dot{u} \rightarrow \sigma = c \dot{\varepsilon}$$

(2.15)

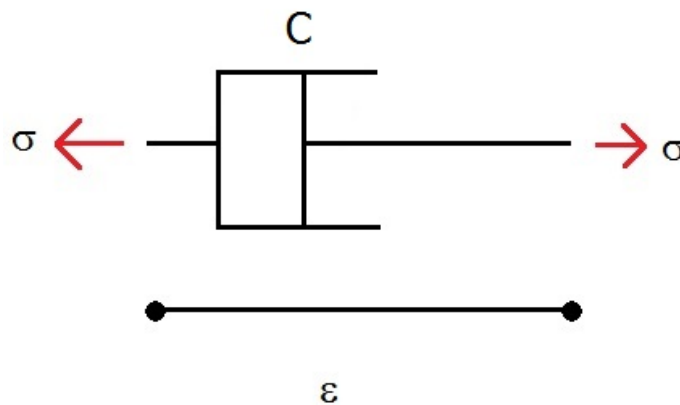


Figura 2.15: Modelo de material viscoso

De esta forma, el comportamiento de muchos materiales viscoelásticos puede ser representado correctamente mediante una combinación de resortes y amortiguadores. Los modelos más utilizados a destacar son los modelos de Maxwell y Kelvin-Voigt.

2.4.1. Modelo de Maxwell

Este modelo representa el comportamiento de las sustancias viscoelásticas como una combinación en serie de un muelle y un amortiguador (figura 2.16).

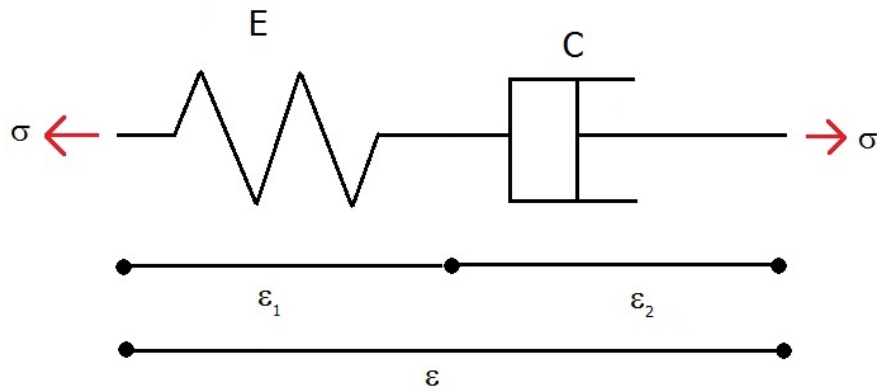


Figura 2.16: Modelo de Maxwell

Partiendo de las ecuaciones 2.14 y 2.15 se conseguirá la ecuación que relacione deformación y tensión para este modelo y se aplicará la Transformada de Laplace consiguiendo lo siguiente:

$$\sigma = \epsilon_1 \cdot E \rightarrow \bar{\sigma} = E \bar{\epsilon}_1 \quad (2.16)$$

$$\sigma = c \cdot \dot{\epsilon}_2 \rightarrow \bar{\sigma} = c \cdot s \cdot \bar{\epsilon}_2 \quad (2.17)$$

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \rightarrow \bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_2 \quad (2.18)$$

Sumando las ecuaciones 2.16 y 2.17 se obtiene:

$$\left(1 + \frac{c}{E} \cdot s\right) \cdot \bar{\sigma} = c s (\bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_2) = c \cdot s \cdot \bar{\epsilon} \quad (2.19)$$

Vibraciones en vigas con amortiguamientos interno y externo

Si se aplica la Antitransformada de Laplace se consigue la ecuación diferencial de este modelo:

$$\sigma + \frac{c}{E} \dot{\sigma} = c \dot{\varepsilon} \quad (2.20)$$

Función de fluencia

$$\sigma + \frac{c}{E} \dot{\sigma} = c \dot{\varepsilon} \rightarrow H(t) + \frac{c}{E} \dot{H}(t) = c \dot{\varepsilon} \quad (2.21)$$

Aplicando la Transformada de Laplace:

$$\frac{1}{s} + \frac{c}{E} = cs \bar{\varepsilon} \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{c}{E} \cdot \frac{1}{s} \right) \quad (2.22)$$

Ahora se aplica la Antitransformada de Laplace

$$J(t) = \varepsilon = \frac{1}{c} \left(\frac{c}{E} \cdot H(t) + t \right) = \frac{1}{c} \left(\frac{c}{E} + t \right) \quad (2.23)$$

Modulo de relajación

$$\sigma + \frac{c}{E} \dot{\sigma} = c \dot{\varepsilon} \rightarrow \sigma + \frac{c}{E} \dot{\sigma} = c \delta(t) \quad (2.24)$$

Aplicando la Transformada de Laplace:

$$\bar{\sigma} + \frac{c}{E} s \bar{\sigma} = c \rightarrow \bar{\sigma} = \frac{E}{E/c + s} \quad (2.25)$$

Ahora se aplica la Antitransformada de Laplace

$$Y(t) = \sigma = E \cdot \exp\left(\frac{-E}{c} + t\right) \quad (2.26)$$

2.4.2. Modelo de Kelvin-Voigt

Este modelo representa el comportamiento de las sustancias viscoelásticas como una combinación en paralelo de un muelle y un amortiguador (figura 2.17).

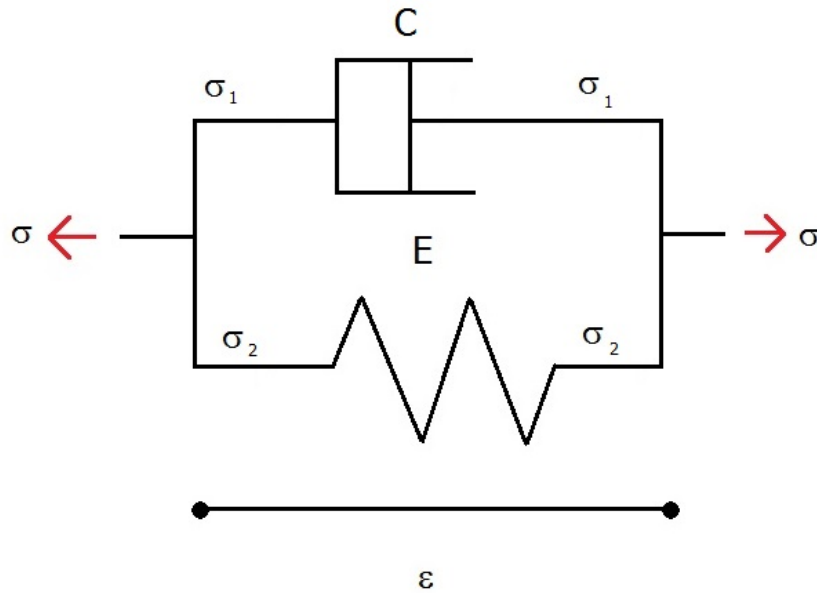


Figura 2.17: Modelo de Kelvin

Partiendo de las ecuaciones 2.14 y 2.15 se podrá conseguir la ecuación que relacione deformación y tensión para este modelo y se le aplicará la Transformada de Laplace consiguiendo lo siguiente:

$$\sigma_1 = \varepsilon \cdot E \rightarrow \overline{\sigma_1} = E \overline{\varepsilon} \quad (2.27)$$

$$\sigma_2 = c \cdot \dot{\varepsilon} \rightarrow \overline{\sigma_2} = c \cdot s \cdot \overline{\varepsilon} \quad (2.28)$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \rightarrow \overline{\sigma} = \overline{\sigma_1} + \overline{\sigma_2} \quad (2.29)$$

Vibraciones en vigas con amortiguamientos interno y externo

Sumando las ecuaciones 2.27 y 2.28 se obtiene:

$$\left(\frac{1}{s}\right) = E\bar{\varepsilon} + c \cdot s \cdot \bar{\varepsilon} \quad (2.30)$$

Si se aplica la Antitransformada de Laplace se consigue la ecuación diferencial de este modelo:

$$\sigma = E\varepsilon + c\dot{\varepsilon} \quad (2.31)$$

Función de fluencia

$$\sigma = E\varepsilon + c\dot{\varepsilon} \rightarrow H(t) = E\varepsilon + c\dot{\varepsilon} \quad (2.32)$$

Aplicando la Transformada de Laplace:

$$\frac{1}{s} = E\bar{\varepsilon} + cs\bar{\varepsilon} \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{s \cdot \left(\frac{E}{c} + s\right)} \quad (2.33)$$

Ahora se aplica la Antitransformada de Laplace

$$J(t) = \varepsilon = \frac{1}{E} \left(1 - \exp\left(-\frac{E}{c}t\right) \right) \quad (2.34)$$

Modulo de relajación

$$\sigma = E\varepsilon + c\dot{\varepsilon} \rightarrow \sigma = E \cdot H(t) + c\delta(t) \quad (2.35)$$

Aplicando la Transformada de Laplace:

$$\bar{\sigma} = E \frac{1}{s} + c$$

Ahora se aplica la Antitransformada de Laplace

$$Y(t) = \sigma = E + c\delta(t)$$

2.4.3. Otros modelos de resortes y amortiguadores

Se puede crear de la misma manera más combinaciones en serie y en paralelo de amortiguadores y resortes, que representarán el comportamiento viscoelástico de un sólido.

En estos casos siempre se llegará a una ecuación diferencial que se puede expresar mediante la expresión:

$$\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\varepsilon}} = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (2.36)$$

Aplicando a la expresión, las definiciones de $J(t)$ y $Y(t)$ obtenidas mediante el ensayo de fluencia y relajación, obteniendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(t) = 1 \cdot H(t) \\ \varepsilon(t) = J(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{J}(s) = \frac{P(s)}{s \cdot Q(s)} \quad (2.37)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon(t) = 1 \cdot H(t) \\ \sigma(t) = J(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{Y}(s) = \frac{Q(s)}{s \cdot P(s)} \quad (2.38)$$

En las cuales $H(t)$ es la función de Heavyside. Combinando las dos funciones se obtiene:

$$\bar{J}(s) \cdot \bar{Y}(s) = \frac{1}{s^2} \quad (2.39)$$

De esta manera se puede conocer el módulo de relajación a partir de la función de fluencia, o viceversa.

2.5 . Integrales Hereditarias

Puesto que los materiales viscoelásticos considerados hasta el momento siguen leyes lineales, se puede utilizar el Principio de Superposición para considerar el caso general de tensión (o deformación) no constante.

Vibraciones en vigas con amortiguamientos interno y externo

Considérese el caso de un salto finito en el valor de la tensión aplicada (figura 2.18).

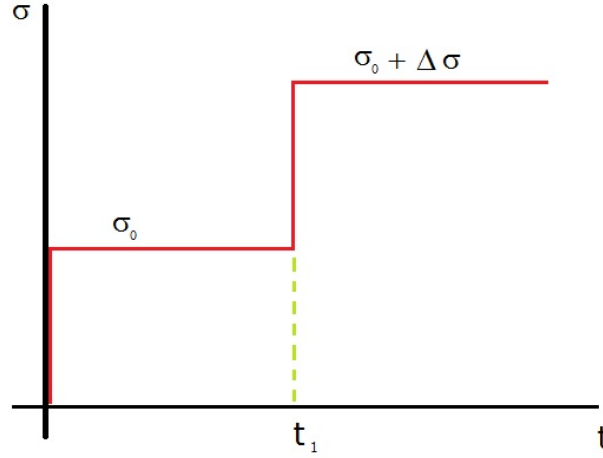


Figura 2.18: Salto infinito en la tensión aplicada

Ya se sabe que para instantes anteriores al salto, la deformación vendrá dada por:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \cdot J(t); t < t_1 \quad (2.40)$$

Utilizando el Principio de Superposición, podemos determinar la deformación en los instantes posteriores de manera sencilla:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \cdot J(t) + \Delta \sigma \cdot J(t - t_1) \quad (2.41)$$

En el caso más general, donde la tensión es una función del tiempo, $\sigma(t)$, puede aplicarse el razonamiento anterior si se considera dicha tensión como una sucesión de infinitos saltos de altura infinitesimal.

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \cdot J(t) + \int_{\tau=0}^{\tau=t} d\sigma \cdot J(t - \tau) \quad (2.42)$$

$$d\sigma = \left(\frac{d\sigma}{d\tau} \right) \cdot d\tau = \dot{\sigma}(\tau) \cdot d\tau \Rightarrow \varepsilon(t) = \sigma_0 \cdot J(t) + \int_{\tau=0}^{\tau=t} \dot{\sigma} \cdot J(t - \tau) \cdot d\tau \quad (2.43)$$

Mediante integración por partes, se llega finalmente a la expresión equivalente siguiente:

$$\varepsilon(t) = \sigma(t) \cdot J(0) + \int_{\tau=0}^{\tau=t} \sigma(\tau) \cdot \dot{J}(t-\tau) \cdot d\tau$$

En el caso de tener prescrita una deformación $\varepsilon(t)$, se puede llegar de manera análoga a una expresión que nos permite obtener la tensión:

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) \cdot Y(0) + \int_{\tau=0}^{\tau=t} \varepsilon(\tau) \cdot \dot{Y}(t-\tau) \cdot d\tau$$

De esta manera se puede obtener la expresión de $\varepsilon(t)$ a partir de $\sigma(t)$, o viceversa, para un material con amortiguamiento viscoelástico. Para ello únicamente habrá que conocer su función de fluencia o su módulo de relajación, respectivamente.

3 . Dinámica de vigas

3.1 . Introducción a la dinámica de vigas

En el siguiente capítulo se trata la conducta dinámica de vigas tipo Euler-Bernoulli con cargas que actúan en la dirección transversal a la misma. Procediendo a realizar los cálculos sin ningún tipo de amortiguamiento a lo largo de la viga. Se tendrá en cuenta hipótesis sobre pequeñas deformaciones.

Sea una viga de longitud L , sección transversal $A(x)$ y un momento de inercia $I(x)$, que está sometida a una carga distribuida por unidad de longitud $F(x,t)$. La densidad del material del cual está compuesto la viga será ρ y su módulo de elasticidad E . Se obtendrá una expresión que determinará los movimientos de todos los puntos de la citada viga, es decir, el desplazamiento transversal $w(x,t)$, también denominado *flecha*. Se supondrán propiedades y dimensiones uniformes a lo largo de la viga, para simplificar las expresiones.

Los extremos de la viga ($x=0$, $x=L$) tendrán unas determinadas condiciones de contorno, las cuales definiremos como:

Extremo empotrado:

Se considerará el desplazamiento (w) y el giro ($\theta=\delta w/\delta x$) nulos en el extremo x_0 en el que se aplica, obteniendo las siguientes expresiones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x_0, t) = 0, \forall t \\ \frac{\partial w}{\partial x}(x_0, t) = 0, \forall t \end{array} \right\}$$

(3.1)

Extremo apoyado

Para este caso se consideran nulos el desplazamiento (w) y el momento flector ($M=-EI \partial^2 w / \partial x^2$) en el extremo:

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x_0, t) = 0, \forall t \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_0, t) = 0, \forall t \end{array} \right\}$$

(3.2)

Vibraciones en vigas con amortiguamientos interno y externo

Extremo libre:

En esta condición de contorno es nulo el momento flector (M) y el esfuerzo cortante ($V = \partial M / \partial x$), lo que conlleva que las derivadas segunda y tercera del desplazamiento sean nulas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_0, t) = 0, \forall t \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x_0, t) = 0, \forall t \end{array} \right\}$$

(3.3)

Como condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad en el instante $t=0$ las cuales se consideraran de valor nulo:

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{array} \right\}$$

(3.4)

Primero se establecerán las características dinámicas de un segmento de viga con un tamaño diferencial dx , donde tendrán una gran importancia las fuerzas inerciales.

Sabiendo que:

$$M = -EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

(3.5)

Si al elemento diferencial anterior se le aplica la 2ª Ley de Newton y se le introduce la ecuación 3.5, se obtiene la ecuación de movimiento de la viga.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(x, t)$$

(3.6)

La solución de la ecuación 3.6 será la suma de la ecuación homogénea (problema de vibraciones libres) más una solución particular de la ecuación completa (problema de vibraciones forzadas).

Vibraciones en vigas con amortiguamientos interno y externo

Problema de vibraciones libres

Utilizando el método de separación de variables (método Galerkin) para la resolución de la ecuación diferencial que corresponde a un problema de vibraciones libres ($F(x,t)=0$). El método Galerkin permite obtener una solución como el sumatorio de varias funciones espaciales y temporales.

Para la simplificación de la resolución se tomarán propiedades constantes en toda la viga, tal como $\rho A(x)=\rho A$ y $EI(x)=EI$.

Si se toma $w_f(x,t)$ como el desplazamiento que se obtiene de un problema de vibraciones libres, mediante el método Galerkin se obtendrá una solución como la siguiente:

$$w_f(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \cdot q_i^f(t) \quad (3.7)$$

Siendo ϕ_i una función espacial y q_i^f una función temporal, que se obtendrá a continuación.

Con la ecuación diferencial 3.6 con $F=0$ y sustituyendo en ella la ecuación ahora obtenida (3.7) se consigue la siguiente ecuación:

$$EI \sum_{i=1}^{\infty} (\phi_i^{IV}(x) \cdot q_i^f(t)) + \rho A \sum_{i=1}^{\infty} (\phi_i(x) \cdot \ddot{q}_i^f(t)) = 0 \quad (3.8)$$

Donde $()^{IV}$ y $(\ddot{ })$ denotan la derivada cuarta y segunda de la expresión a la cual se le aplica.

Para cada sumando i -ésimo se debe cumplir la siguiente relación:

$$\frac{EI \phi_i^{IV}(x)}{\rho A \phi_i(x)} = \frac{\ddot{q}_i^f}{q_i^f} = cte = \omega_i^2 \quad (3.9)$$

De donde resultarían dos ecuaciones diferenciales, una para la componente espacial, y otra para componente temporal. Mencionar que ω_i será la frecuencia propia i -ésima de la viga.

$$\frac{EI}{\rho A} \phi_i^{IV}(x) - \omega_i^2 \phi_i(x) = 0 \quad (3.10)$$

$$\ddot{q}_i^f(t) + \omega_i^2 q_i^f(t) = 0 \quad (3.11)$$

Se resuelve la ecuación espacial 3.10 suponiendo que $\phi(x) = Ae^{\eta \cdot x}$

$$\frac{EI}{\rho A} \phi_i^{IV}(x) - \omega_i^2 \phi_i(x) = 0 \Rightarrow a \phi_i^{IV}(x) - b \phi_i(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{EI}{\rho A} \\ b = \omega_i^2 \end{cases} \quad (3.12)$$

$$a \phi_i^{IV}(x) - b \phi_i(x) = 0 \Rightarrow a \eta^4 e^{\eta x} - b e^{\eta x} = 0 \Rightarrow a \eta^4 - b = 0 \Rightarrow \eta^4 = \frac{b}{a} \quad (3.13)$$

$$\eta = \pm \sqrt[4]{\pm \sqrt{b/a}} = \begin{cases} \left(\frac{b}{a}\right)^{1/4} \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{1/4} \cdot i \\ -\left(\frac{b}{a}\right)^{1/4} \\ -\left(\frac{b}{a}\right)^{1/4} \cdot i \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\phi_i(x) = A_i \cdot e^{\eta_i \cdot x} + B_i \cdot e^{-\eta_i \cdot x} + C_i \cdot e^{\eta_i \cdot x \cdot i} + D_i \cdot e^{-\eta_i \cdot x \cdot i} \quad (3.15)$$

$$\phi_i(x) = A_i \cdot \cos(\eta_i x) + B_i \cdot \sin(\eta_i x) + C_i \cdot \cosh(\eta_i x) + D_i \cdot \sinh(\eta_i x); \quad \eta^4 = \frac{\rho A}{EI} \cdot \omega_i^2 \quad (3.16)$$

En la ecuación 3.16 A_i , B_i , C_i , D_i son constantes que se deben hallar aplicando las condiciones de contorno y de implantar que una solución de ellas sea la no trivial, distinta de cero. Las funciones $\phi_i(x)$ se denominan modos propios de vibración.

Vibraciones en vigas con amortiguamientos interno y externo

La propiedad de ortogonalidad de los modos propios se expresa con

$$\int_0^L \rho A \phi_i(x) \phi_j(x) dx = 0; \forall i \neq j \quad (3.17)$$

$$\int_0^L EI \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx = 0; \forall i \neq j \quad (3.18)$$

Finalmente normalizando los modos propios:

$$\int_0^L \rho A \phi_k^2(x) dx = 1; \forall k = 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

Se procede al cálculo de los modos propios para el caso de una viga biapoyada partiendo de la ecuación 3.16:

-Condiciones de contorno:

$$\phi(0) = 0 \rightarrow A_i + C_i = 0 \quad (3.20)$$

$$\phi(L) = 0 \rightarrow A_i \cos(\eta_i L) + B_i \sin(\eta_i L) + C_i \cosh(\eta_i L) + D_i \sinh(\eta_i L) = 0 \quad (3.21)$$

$$\phi''(0) = 0 \rightarrow -A_i \eta_i^2 + C_i \eta_i^2 = 0 \quad (3.22)$$

$$\phi''(L) = 0 \rightarrow -B_i \eta_i^2 \sin(\eta_i L) + D_i \eta_i^2 \sinh(\eta_i L) = 0 \quad (3.23)$$

Usando las ecuaciones 3.20 y 3.22 y sustituyendo se obtiene que A_i y B_i son nulas. Introduciendo lo obtenido en 3.21 y simplificando con 3.23 de la siguiente manera:

$$\left. \begin{array}{l} B_i \sin(\eta_i L) + D_i \sinh(\eta_i L) = 0 \\ -B_i \sin(\eta_i L) + D_i \sinh(\eta_i L) = 0 \end{array} \right\} \frac{D_i}{2 \cdot D_i \sinh(\eta_i L)} = 0 \quad \sinh(\eta_i L) = 0 \rightarrow \eta_i = 0 \rightarrow \frac{D_i}{\phi_i(x)} = 0 \rightarrow w(x, t) = 0 \rightarrow \emptyset \quad (3.24)$$

Vibraciones en vigas con amortiguamientos interno y externo

Sustituyendo en 3.21 lo obtenido se llega a que:

$$B_i \sin(\eta_i L) = 0 \begin{cases} B_i = 0 \rightarrow \exists \\ \sin(\eta_i L) = 0 \rightarrow \eta_i L = i \cdot \pi \rightarrow \eta_i = \frac{i \cdot \pi}{L} \end{cases} \quad (3.25)$$

Por tanto los modos propios y las frecuencias propias de una viga biapoyada serán:

$$\phi_i(x) = C \cdot \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (3.26)$$

$$\omega_i = \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (3.27)$$

El valor de la constante C resulta de introducir 3.26 en 3.17:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho A (\phi_i(x))^2 dx = 1 &\Rightarrow C^2 \int_0^L \rho A \cdot \sin^2\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx = 1 \Rightarrow C^2 \cdot \rho A \int_0^L \frac{1 - \cos\left(\frac{2i\pi x}{L}\right)}{2} dx = 1 \Rightarrow \\ \frac{C^2 \cdot \rho A}{2} \left[\int_0^L 1 dx - \int_0^L \cos\left(\frac{2i\pi x}{L}\right) dx \right] &= 1 \Rightarrow \frac{C^2 \cdot \rho A L}{2} = 1 \Rightarrow C = \sqrt{\frac{2}{\rho A L}} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Problema de vibraciones forzadas

Se calcula la solución particular $w_p(x,t)$ para $F(x,t) \neq 0$, descomponiendo la función desplazamiento de forma de variables separadas como hemos visto anteriormente, donde utilizando los modos propios ϕ_i calculados anteriormente, y además el término $F(x,t)$ de forma de serie de los modos propios.

$$\left. \begin{aligned} w_p(x,t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i^p(t) \\ F(x,t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) f_i(t) \end{aligned} \right\} \ddot{q}_i^p(t) + \omega_i^2 q_i^p(t) = \frac{f_i(t)}{\rho A} \quad (3.29)$$

Aplicando la propiedad de la ortogonalidad de los modos propios se obtiene las funciones $f_i(t)$:

$$f_i(t) = \frac{\int_0^L F(x,t)\phi_i(x)dx}{\int_0^L \phi_i^2(x)dx} \quad (3.30)$$

Se obtiene como solución particular de $q_i^p(t)$:

$$q_i^p(t) = \frac{1}{\rho A \omega_i} \int_0^t f_i(\tau) \cdot \sin(\omega_i(t-\tau)) d\tau \quad (3.31)$$

Problema de vibraciones forzadas: solución general

Después de haber obtenido la solución general del problema de vibraciones libres, y una solución particular del problema no homogéneo, la expresión general de vibraciones forzadas será la suma de las anteriores deducidas:

$$w(x,t) = w_f(x,t) + w_p(x,t) \quad (3.32)$$

3.2 . Vigas con amortiguamiento viscoelástico

En esta parte se va a introducir de manera general cómo influye la aplicación de un amortiguamiento en la viga. Estudiando cómo afecta en los desplazamientos de una viga.

Se va a suponer que una viga de longitud L tiene un material viscoelástico amortiguador en la región $[x_1, x_2]$ a lo largo de la viga.

La ecuación del movimiento para este caso será la ecuación 3.6 más un término perteneciente al amortiguamiento que denominaremos $\Phi(x,t)$.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Phi(x,t) = F(x,t) \quad (3.33)$$

Vibraciones en vigas con amortiguamientos interno y externo

Ahora el objetivo es hallar una expresión para $\Phi(x,t)$ que se adapte a un comportamiento real de la viga amortiguada, y después aplicar un método de resolución de los desplazamientos transversales $w(x,t)$.

La función $\Phi(x,t)$ únicamente será no nula en el tramo definido $[x_1, x_2]$, para el resto de la viga esta función será nula.

Una forma común de expresar $\Phi(x,t)$ es la ecuación de amortiguamiento viscoso quedando de la siguiente manera:

$$\Phi(x,t) = k \frac{\partial w(x,t)}{\partial t}, x_1 \leq x \leq x_2 \quad (3.34)$$

Otro ejemplo de amortiguamiento considera que la fuerza Φ en un punto de la viga x depende de la velocidad instantánea local, y además de la historia de velocidades de los puntos cercanos al escogido.

$$\Phi(x,t) = k \int_{x_1}^{x_2} \int_0^t c(x-\xi) \cdot g(t-\tau) \frac{\partial w(\xi,\tau)}{\partial \tau} d\tau d\xi \quad (3.35)$$

Donde $c(x-\xi)$ y $g(t-\tau)$ son funciones que tienen diferentes modelos, los más usuales son:

$$c(x-\xi) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x-\xi|} \quad ; \quad g(t-\tau) = \mu e^{-\mu(t-\tau)} \quad (3.36)$$

Siendo k, α y μ propiedades del material amortiguador.

Hay que considerar que $\Phi(x,t)$ estará compuesto a su vez de dos términos, uno externo y otro interno, de tal forma que ahora la ecuación del movimiento quedaría:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Phi_e(x,t) + \Phi_i(x,t) = F(x,t) \quad (3.37)$$

4 . Vigas con amortiguamiento no local

4.1 . Desarrollo del problema

Se toma una viga de longitud L , con unas determinadas condiciones de contorno en los extremos, cuya masa por unidad de longitud sea ρA , tenga una rigidez a flexión tal que EI , y que esté sometida a una fuerza con distribución uniforme a lo largo de la viga. El objetivo consistirá en hallar el desplazamiento en los puntos de la viga, considerando un modelo de amortiguamiento viscoelástico no local de la forma de la ecuación 3.35.

Las condiciones iniciales serán nulas:

$$\begin{cases} w(x,0) = w_0(x) \\ \dot{w}(x,0) = \dot{w}_0(x) \end{cases} \quad (4.1)$$

Y las condiciones de contorno se tomarán según las ecuaciones 3.1 a 3.3.

La ecuación 4.2 representa el movimiento para un sistema dinámico continuo con amortiguamiento representado por $\Gamma(x,t)$:

$$\rho A \ddot{w}(x,t) + EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \Gamma(x,t) = F(x,t) \quad (4.2)$$

Como se ha dicho en el capítulo anterior en este problema se tendrán amortiguamientos interno y externo, por tanto:

$$\Gamma(x,t) = \Gamma_e(x,t) + \Gamma_i(x,t) \quad (4.3)$$

Se desglosarán las componentes de la ecuación 4.3 en los términos externo e interno:

$$\begin{cases} \Gamma_e(x,t) = \int_{x_1}^{x_2} \int_0^t C_e(x,\xi,t-\tau) \dot{w}(\xi,\tau) d\tau d\xi \\ \Gamma_i(x,t) = \int_{x_1}^{x_2} \int_0^t C_i(x,\xi,t-\tau) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\gamma(\xi) \frac{\partial^2 \dot{w}(\xi,\tau)}{\partial \xi^2} \right) d\tau d\xi \end{cases} \quad (4.4)$$

Vibraciones en vigas con amortiguamientos interno y externo

Donde se encuentra el coeficiente de amortiguamiento interno $\gamma(\xi)$, y siendo las condiciones de contorno iniciales las mismas que para el caso no amortiguado. Se tomará γ como constante, γ_0 .

También se tendrán dos funciones de amortiguamiento C_e y C_i expresandolas de esta manera:

$$C_e(x, \xi, t - \tau) = H_e(x) c_e(x - \xi) g_e(t - \tau) \quad (4.5)$$

$$C_i(x, \xi, t - \tau) = H_i(x) c_i(x - \xi) g_i(t - \tau) \quad (4.6)$$

Como se observa las funciones de amortiguamiento serán el producto tres funciones que reflejan los aspectos que se deben de tener en cuenta en el modelo, una parte temporal, otra espacial y una última de la posición del amortiguamiento. Expresándola de forma general:

$$C(x, \xi, t - \tau) = H(x) c(x - \xi) g(t - \tau) \quad (4.7)$$

Se distingue un dominio espacial $H(x)$ en el que se considera el efecto amortiguador, coincidente con el intervalo $[x_1, x_2]$ donde se encontrará el amortiguamiento, por tanto tendrá valor constante en el intervalo y nulo fuera de este. La función de Kernel $c(x - \xi)$ representa el aspecto no local en el espacio. La función de relajación $g(t - \tau)$ representa la influencia de la historia de movimientos de la viga.

4.2 . Función de amortiguamiento: casos particulares

4.2.1. Amortiguamiento viscoso local

Mediante la función $C(x, \xi, t - \tau)$ se puede particularizar el modelo de amortiguamiento para el caso de amortiguamiento viscoso local, donde deja de influir el aspecto no local del modelo y la historia de desplazamientos de la viga, se puede observar mediante las siguientes identidades

$$c(x - \xi) = \delta(x - \xi) \quad ; \quad g(t - \tau) = \delta(t - \tau) \quad (4.8)$$

Cumpléndose para cualquier función $\chi(\xi, \tau)$:

$$\begin{cases} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^t C_e(x, \xi, t - \tau) \chi(\xi, \tau) d\xi = H_e(x) \chi(x, t) \\ \int_{x_1}^{x_2} \int_0^t C_i(x, \xi, t - \tau) \chi(\xi, \tau) d\xi = H_i(x) \chi(x, t) \end{cases} \quad (4.9)$$

4.2.2. Amortiguamiento viscoelástico local

$$c(x - \xi) = \delta(x - \xi) \quad (4.10)$$

Obteniéndose:

$$\begin{cases} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^t C_e(x, \xi, t - \tau) \chi(\xi, \tau) d\xi = H_e(x) \int_0^L g_e(t - \tau) \chi(x, t) d\tau \\ \int_{x_1}^{x_2} \int_0^t C_i(x, \xi, t - \tau) \chi(\xi, \tau) d\xi = H_i(x) \int_0^L g_i(t - \tau) \chi(x, t) d\tau \end{cases}$$

4.2.3. Amortiguamiento viscoso no local

$$g(t - \tau) = \delta(t - \tau) \quad (4.11)$$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^t C_e(x, \xi, t - \tau) \chi(\xi, \tau) d\xi = H_e(x) \int_0^L c_e(x - \xi) \chi(\xi, t) d\xi \\ \int_{x_1}^{x_2} \int_0^t C_i(x, \xi, t - \tau) \chi(\xi, \tau) d\xi = H_i(x) \int_0^L c_i(x - \xi) \chi(\xi, t) d\xi \end{cases} \quad (4.12)$$

4.3 . Función de Kernel espacial

La función admiten diferentes expresiones alternativas, debe ser continua no negativa y la cual tendrá un máximo absoluto cuando $(x - \xi) = 0$, siendo nula cuando esta tienda a infinito. Se normaliza de la siguiente manera:

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(x) dx = 1$$

(4.13)

Se van a representar distintos modelos donde estarán unos parámetros α y l_0 , que son característicos del material amortiguador. Siendo α el coeficiente de Kernel que indica la influencia de los puntos amortiguados que se encuentran en el entorno $[x-\xi]$, y l_0 la distancia de influencia.

A continuación se describen los modelos más utilizados:

4.3.1. Decrecimiento exponencial

$$c(x - \xi) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x-\xi|}$$

(4.14)

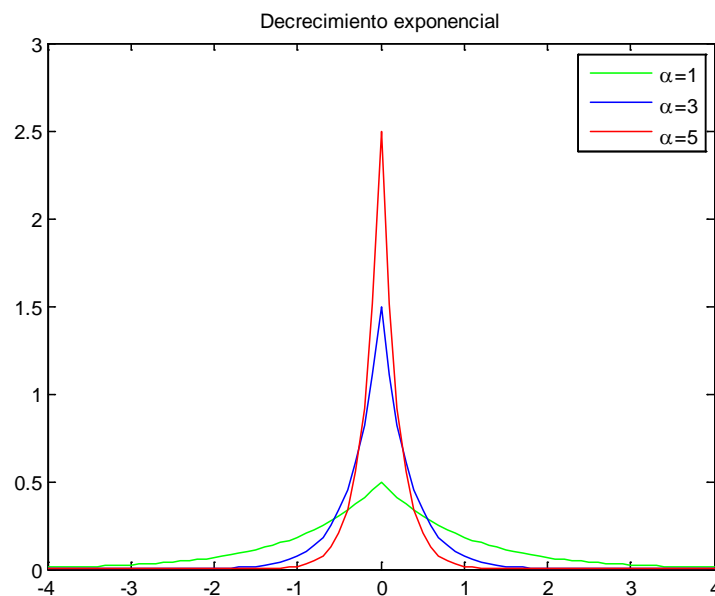


Figura 4.1: Función de Kernel: Decrecimiento exponencial

4.3.2. Función error

$$c(x - \xi) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2(x-\xi)^2}{2}}$$

(4.15)

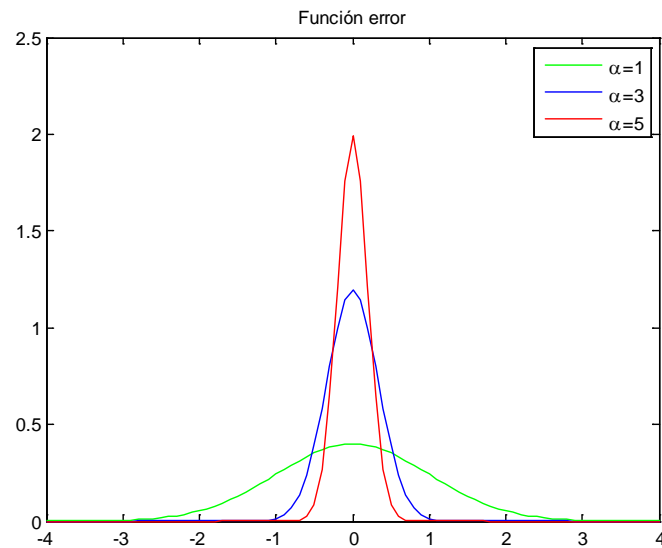


Figura 4.2: Función de Kernel: función error

4.3.3. Función escalón

$$c(x - \xi) = \begin{cases} \frac{1}{l_0} \Rightarrow |x - \xi| \leq \frac{l_0}{2} \\ 0 \Rightarrow \text{resto} \end{cases}$$

(4.16)

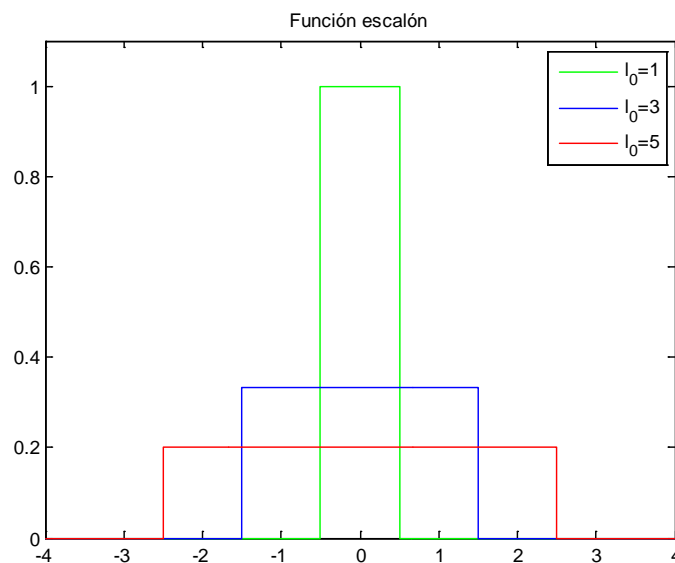


Figura 4.3: Función de Kernel: Función error

4.3.4. Función triangular

$$c(x-\xi) = \begin{cases} \frac{1}{l_0} \left(1 - \frac{|x-\xi|}{l_0} \right) \Rightarrow |x-\xi| \leq l_0 \\ 0 \Rightarrow \text{resto} \end{cases}$$

(4.17)

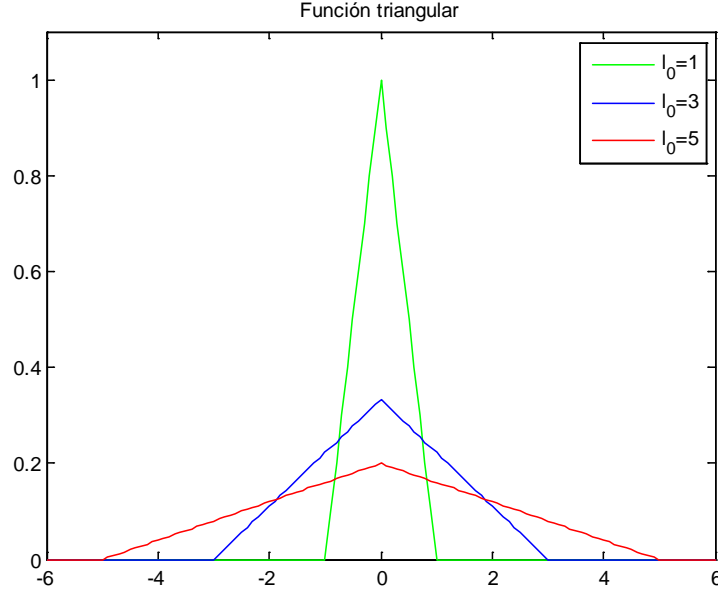


Figura 4.4: Función de Kernel: Función triangular

Se va a escoger para la resolución del problema la función de Kernel espacial que corresponde al decrecimiento exponencial, por simplificación ya que es la más sencilla. Cabe destacar que cuando el valor α tiende a infinito el material se caracterizara por tener un aspecto local, según la ecuación 4.10.

4.4 . Función de relajación

Para el caso de la función de relajación también puede tomar varios modelos, entre los que destacan la expresión en forma exponencial y la gaussiana normalizada:

$$g_1(t-\tau) = \frac{\sum_{k=1}^M \beta_k \mu_k e^{-\mu_k(t-\tau)^2}}{\sum_{k=1}^M \beta_k}; \quad g_2(t-\tau) = \frac{\sum_{k=1}^M \beta_k \sqrt{\mu_k} e^{-\mu_k(t-\tau)^2}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=1}^M \beta_k}$$

(4.18)

Vibraciones en vigas con amortiguamientos interno y externo

Donde μ_k depende de las propiedades mecánicas viscoelásticas, determinándose de forma experimental. β_k es la influencia que se asigna a los sumandos de las expresiones anteriores.

Se puede definir un tiempo de relajación característico, θ_c el cual será infinito para un material perfectamente elástico, y en el caso de uno viscoso será nulo.

$$\theta_c = \int_0^{\infty} t g(t) dt \quad (4.19)$$

Para simplificar, la función de relajación que se usará será una expresión sencilla del primer modelo:

$$g(t - \tau) = \mu e^{-\mu(t-\tau)} \quad ; \quad \theta_c = \frac{1}{\mu} \quad (4.20)$$

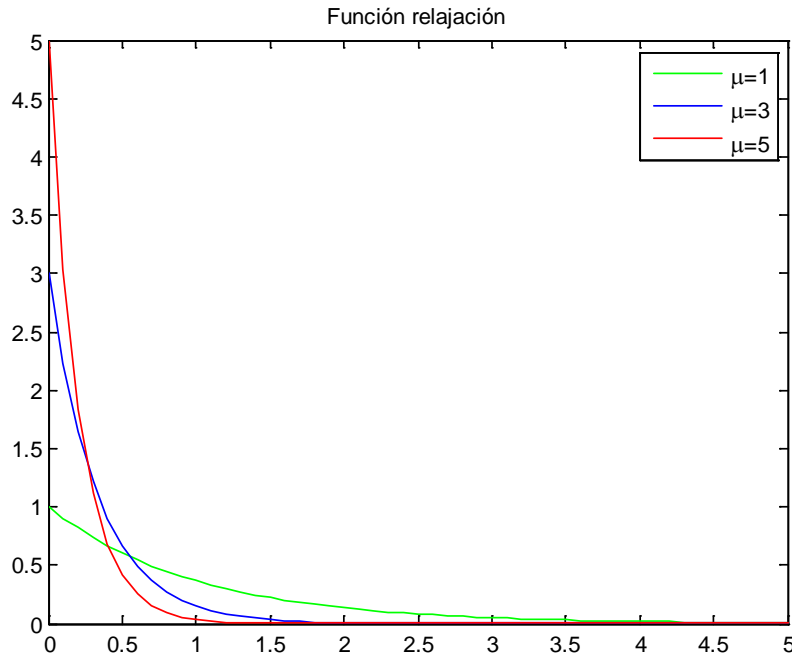


Figura 4.5: Función de relajación

Se puede observar que cuanto mayores valores tenemos de μ el material se relaja más rápido, concretamente el modelo de un material viscoso será:

$$\mu \rightarrow \infty \Rightarrow g(t - \tau) \rightarrow \delta(t - \tau) \quad (4.21)$$

5 . Método de resolución de la ecuación de movimiento

5.1 . La Transformada de Laplace

Para resolver la ecuación de movimiento de la ecuación 4.2 se deberá usar este método, transformando la ecuación al dominio de Laplace, es decir, se aplica la transformada a toda la ecuación. Se define por $W(x,s)$ y $G(s)$ a las transformadas de $w(x,t)$ y $g(t)$ respectivamente. Para simplificar desde un inicio se toman las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad nulas, como expresa la ecuación 4.1.

$$\angle[\ddot{w}(x,t)] = s^2 W(x,s) \quad (5.1)$$

$$\angle[w^{IV}(x,t)] = W^{IV}(x,s) \quad (5.2)$$

Término de amortiguamiento externo

$$\begin{aligned} \angle[\Gamma_e(x,t)] &= \int_{x_1}^{x_2} H_e(x) c_e(x-\xi) \cdot \angle\left[\int_0^t g_e(t-\tau) \dot{w}(\xi,\tau) d\tau\right] d\xi = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} H_e(x) c_e(x-\xi) \cdot \angle[g_e(t)] \cdot \angle[\dot{w}(\xi,t)] d\xi = \\ &= G_e(s) \int_{x_1}^{x_2} H_e(x) c_e(x-\xi) s W(\xi,s) d\xi \end{aligned} \quad (5.3)$$

Término de amortiguamiento interno

$$\begin{aligned}\angle[\Gamma_i(x, t)] &= \int_{x_1}^{x_2} H_i(x) c_i(x - \xi) \cdot \angle \left[\int_0^t g_i(t - \tau) [\gamma(\xi) \dot{w}''(\xi, \tau)]'' d\tau \right] d\xi = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} H_i(x) c_i(x - \xi) \cdot \angle[g_i(t)] \cdot \angle[[\gamma(\xi) \dot{w}''(\xi, t)]''] d\xi = \\ &= G_i(s) \int_{x_1}^{x_2} H_i(x) c_i(x - \xi) [\gamma(\xi) (sW''(\xi, s))]'' d\xi\end{aligned}\quad (5.4)$$

Término independiente:

$$\angle[F(x, t) = \overline{F}(x, s)]\quad (5.5)$$

La Transformada de Laplace de la ecuación de movimiento queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\rho A s^2 W(x, s) + EI W^{IV}(x, s) + s G_e(s) \int_{x_1}^{x_2} H_e(x) c_e(x - \xi) W(\xi, s) d\xi + \\ + s G_i(s) \int_{x_1}^{x_2} H_i(x) c_i(x - \xi) [\gamma(\xi) W''(\xi, s)]'' d\xi = \overline{F}(x, s)\end{aligned}\quad (5.6)$$

La función $\overline{F}(x, s)$ será conocida.

5.2 . Método de Galerkin

Se desarrolla $W(x, s)$ mediante el método de Galerkin que consiste en descomponer como una serie de productos de funciones:

$$W(x, s) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(s) \phi_j(x) \quad (5.7)$$

Se simplifica eligiendo las funciones $\phi(x)$ que se obtienen en el problema no amortiguado como base. $\phi(x)$ deben cumplir sólo las condiciones de contorno geométricas, sin que fuesen necesarias las condiciones asociadas al extremo libre, si se diese el caso que existiera. La elección de estos modos propios no amortiguados es debido a la condición de ortogonalidad ya explicada, y que simplificará los cálculos.

$$\begin{aligned} & s^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(q_j(s) \int_0^L \rho A \phi_j(x) \phi_k(x) dx \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(q_j(s) \int_0^L EI \phi_j^{IV}(x) \phi_k(x) dx \right) + \\ & + s G_e(s) \sum_{j=1}^{\infty} \left(q_j(s) \int_0^{x_2} \int_{x_1}^L H_e(x) c_e(x - \xi) \phi_j(\xi) \phi_k(x) d\xi dx + \right) \\ & + s G_i(s) \sum_{j=1}^{\infty} \left(q_j(s) \int_0^{x_2} \int_{x_1}^L H_i(x) c_i(x - \xi) [\gamma(\xi) (\phi_j''(\xi) \phi_k(x))] d\xi dx \right) = \bar{F}(x, s) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Se continuará simplificando la expresión, para ello se utiliza la condición de ortogonalidad de los modos propios no amortiguados:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(q_j(s) \int_0^L \rho A \phi_j(x) \phi_k(x) dx \right) = \sum_{j=1}^{\infty} (q_j(s) \delta_{jk}) = q_k(s) \quad (5.9)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(q_j(s) \int_0^L EI \phi_j^{IV}(x) \phi_k(x) dx \right) = \sum_{j=1}^{\infty} (q_j(s) \omega_j^2 \delta_{jk}) = q_k(s) \cdot \omega_k^2 \quad (5.10)$$

Obteniendo la siguiente expresión, que es una ecuación matricial:

$$[D(s)] \cdot \{q(s)\} = \{f(s)\} \quad (5.11)$$

Vibraciones en vigas con amortiguamientos interno y externo

Donde cada término es:

$$\{q(s)\} = \begin{Bmatrix} q_1(s) \\ q_2(s) \\ \dots \\ q_N(s) \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

$$\{f(s)\} = \begin{Bmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ \dots \\ f_N(s) \end{Bmatrix} ; \quad f_k(s) = \int_0^L F(x,s)\phi_k(x)dx \quad (5.13)$$

$$[D(s)] = s^2[M] + sG_e(s)[C_e] + sG_i(s)[C_i] + [K] \quad (5.14)$$

A su vez dentro en el término $[D(s)]$ se encuentran varias matrices que se calculan a su vez a través de las siguientes expresiones:

-Matriz de masa

$$M_{kj} = \int_0^L \rho A \phi_j(x) \phi_k(x) dx = \delta_{kj} \quad (5.15)$$

-Matrices de amortiguamiento:

$$(C_e)_{kj} = H_0^{(e)} \int_{x_1}^{x_2} \int_{X_1}^{X_2} c_e(x-\xi) \phi_j(x) \phi_k(x) d\xi dx \quad (5.16)$$

$$(C_i)_{kj} = H_0^{(i)} \int_{x_1}^{x_2} \int_{X_1}^{X_2} c_i(x-\xi) \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\gamma(\xi) \frac{d^2 \phi_j(x)}{d\xi^2} \right) \phi_k(x) d\xi dx \quad (5.17)$$

-Matriz de rigidez

$$K_{kj} = \int_0^L \frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} \right) \phi_k(x) dx = \int_0^L EI(x) \frac{d^4 \phi_j(x)}{dx^4} \phi_k(x) dx = \omega_k^2 \delta_{jk} \quad (5.18)$$

Vibraciones en vigas con amortiguamientos interno y externo

Donde ω_k son las frecuencias propias del problema no amortiguado asociado, y δ_{jk} la función delta de Kronecker. Se tomará además $\gamma(\xi) = \gamma_0 = \text{cte.}$

Del sistema matricial antes hallado (5.11) se obtienen las funciones $q_k(t)$ mediante la siguiente ecuación.

$$\{q(t)\} = \mathcal{L}^{-1} \left[[D(s)]^{-1} \cdot \{f(s)\} \right] \quad (5.19)$$

Las cuales utilizaremos a la hora de hallar los desplazamientos de las vigas:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^N \phi_k(x) q_k(t) \quad (5.20)$$

6 . Casos numéricos

6.1 . Introducción y datos

En esta parte se va a aplicar la Transformada de Laplace y el Metodo de Galerkin, antes citado, con el objetivo de plantear y solucionar diferentes casos, analizando la influencia de los parámetros que intervienen.

Se tendrá en cuenta diferentes condiciones de contorno: viga biapoyada, empotrada en un extremo teniendo el otro libre, empotrada y apoyada, y biempotrada. Se variará los distintos parámetros que intervienen para finalmente comparar los resultados entre sí y obtener conclusiones sobre la influencia del amortiguamiento.

Al problema se le fijarán unos parámetros de referencia como punto de partida, tanto geométricos y del material como de los modelos que intervienen. Variando el parámetro individualmente para después compararlo. Por simplicidad se tomará la unidad de fuerza por unidad de longitud, $F(x,t)=IN/m$, con la cual se podrán sacar resultados más prácticos.

Para la comparación de resultados sería inviable hacer la comparación de todos los puntos de la placa utilizando la expresión $w(x,t)$ obtenida en cada caso, ya que esta es demasiado extensa y compleja como para utilizarla en cada punto de la viga. Por lo tanto se considerará en cada caso el mismo punto de aplicación, eligiendo como punto de referencia el punto medio de la viga, $x=L/2$. Demostraremos que la elección de este punto no influye demasiado en el análisis.

Una vez seleccionado el punto geométrico de referencia, se debe definir una forma para poder comparar entre si las distintas curvas que obtendremos con los valores iniciales. Para comparar los distintos casos se utilizará el parámetro η , la capacidad de amortiguamiento. Relaciona cada curva $w(L/2,t)$ que corresponde a cualquier punto de la viga amortiguada, con las mismas condiciones de contorno, misma fuerza por unidad de longitud y mismas propiedades mecánicas, con la correspondiente curva del caso no amortiguado. De esta manera definimos η :

$$\eta = \frac{w_{\max}^* - w_{\max}}{w_{\max}^* - w_{ref}} \quad (6.1)$$

En esta ecuación se distinguen w_{\max} , que es el valor máximo de la función $w(L/2,t)$ hallada para el caso amortiguado, w_{\max}^* como el valor máximo que se obtiene en el caso no amortiguado con las mismas condiciones. El parámetro w_{ref} es el desplazamiento de referencia que corresponde al punto de equilibrio, es decir al valor que tiende la función

Vibraciones en vigas con amortiguamientos interno y externo

w cuando el tiempo tiende a infinito. En la siguiente figura 6.1 se ve un ejemplo práctico de la aplicación de este parámetro.

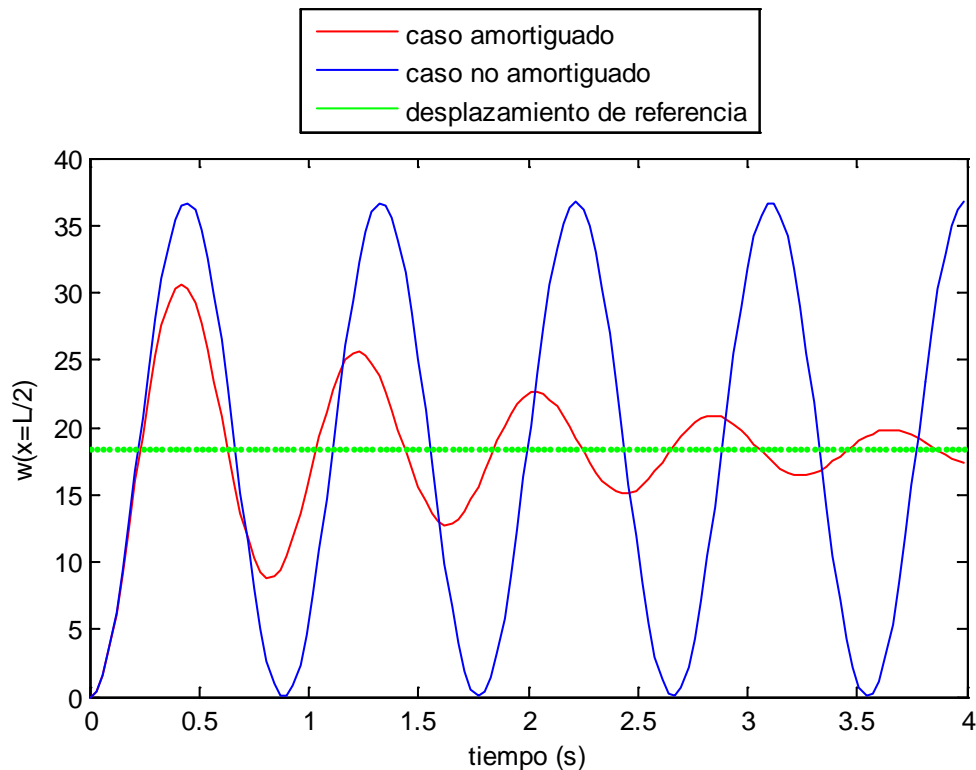


Figura 6.1 Ejemplo que justifica la definición de η

Se observan dos curvas, la azul corresponde al desplazamiento obtenido para una viga sin amortiguamiento, y la roja es el desplazamiento para una viga amortiguada con las mismas condiciones de contorno. Se observa que en el caso amortiguado se obtendría un $\eta=1$ cuando el desplazamiento máximo es igual que el de referencia, y para el caso no amortiguado $\eta=0$, ya que hay ausencia de material que amortigua. Por lo tanto con este parámetro podremos hacer una comparativa entre los distintos casos resueltos.

Parámetros de referencia:

Para poder analizar cada caso se tienen unos parámetros iniciales los cuales se irán variando uno por uno y observando su influencia.

-Geometría:

- Longitud de la viga: $L=2\text{m}$

- Sección transversal: cuadrada de lado $l=5\text{mm}$; $A=25\text{mm}^2$; $I=52.0833\text{mm}^4$

Vibraciones en vigas con amortiguamientos interno y externo

-Material base:

·Densidad: $\rho=2700\text{kg/m}^3$

·Modulo de elasticidad: $E=70\text{GPa}$

-Amortiguamiento:

·Extensión: $x_1=L/4$; $x_2=3L/4$ ($\Delta x=L/2$)

·Función de Kernel espacial: $c(x-\xi)=\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha|x-\xi|}$; $\alpha_i=\alpha_e=5\text{m}^{-1}$

·Función de relajación: $g(t-\tau)=\mu e^{-\mu(t-\tau)}$; $\mu_i=\mu_e=30\text{s}^{-1}$

· $H_0^e=H_0^i=1\text{Ns/m}$

· $\gamma_0=0.2\text{m}^4$

-Fuerza exterior:

· $F(x,t)=1\text{N/m}$

-Condiciones iniciales:

·Desplazamiento: $w(x,0)=0$

·Velocidad: $dw/dt(x,0)=0$

6.2 . Caso 1: Viga biapoyada

6.2.1. Modos propios no amortiguados

Para iniciar la solución del problema, se va a determinar los modos propios del problema no amortiguado, es decir, obtener el conjunto de funciones $[\phi_i]$ que serán utilizadas para la resolución del problema. Aplicando las condiciones de contorno a la ecuación general:

$$\phi_j(x) = A_j \cdot \cos(\eta_j x) + B_j \cdot \sin(\eta_j x) + C_j \cdot \cosh(\eta_j x) + D_j \cdot \sinh(\eta_j x); \quad \eta^4 = \frac{\rho A}{EI} \cdot \omega_j^2 \quad (6.2)$$

$$w(0,t) = w(L,t) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L,t) = 0 \quad (6.3)$$

Si se impone que existe una solución no nula, y normalizando la expresión obtenemos:

$$\phi_j = \sqrt{\frac{2}{\rho A L}} \sin \frac{j\pi x}{L} \quad ; \quad \omega_j = \left(\frac{j\pi}{L} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (6.4)$$

6.2.2. Solución del problema

A continuación se procede a resolver el problema para una viga biapoyada con amortiguamiento externo e interno, donde se ha elegido un total de 5 términos en la serie de Galerkin, $N=5$:

$$M_{kj} = \int_0^L \rho A \phi_j(x) \phi_k(x) dx = \delta_{ij} \quad (6.5)$$

$$K_{kj} = \int_0^L EI \frac{d^4 \phi_j(x)}{dx^4} \phi_k(x) dx = \omega_j^2 \delta_{ij} \quad (6.6)$$

$$(C_e)_{kj} = H_0^{(e)} \int_{x_1}^{x_2} \int_{X_1}^{X_2} c_e(x - \xi) \phi_j(x) \phi_k(x) d\xi dx \quad (6.7)$$

$$(C_i)_{kj} = H_0^{(i)} \int_{x_1}^{x_2} \int_{X_1}^{X_2} c_i(x - \xi) \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\gamma_0 \frac{d^2 \phi_j(x)}{d\xi^2} \right) \phi_k(x) d\xi dx \quad (6.8)$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

$$K = \begin{pmatrix} 328,831 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5261,29 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 26635 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 84181 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 205519 \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

$$C_e = \begin{pmatrix} 9,9318 & 0 & -4,3139 & 0 & -0,744 \\ 0 & 3,7775 & 0 & -3,4799 & 0 \\ -4,3139 & 0 & 3,0546 & 0 & -1,3658 \\ 0 & -3,4799 & 0 & 3,5701 & 0 \\ -0,744 & 0 & -1,3658 & 0 & 2,5894 \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

$$C_i = \begin{pmatrix} 12,0931 & 0 & -5,2526 & 0 & -0,9059 \\ 0 & 73,5923 & 0 & -67,7944 & 0 \\ -425,4609 & 0 & 301,2597 & 0 & -134,6994 \\ 0 & -1084,71 & 0 & 1113,0201 & 0 \\ -566,20252 & 0 & -1039,3469 & 0 & 1970,5465 \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

Vibraciones en vigas con amortiguamientos interno y externo

Se procede a calcular los términos de la ecuación $[D(s)] \cdot \{q(s)\} = \{f(s)\}$:

$$[D(s)] = s^2[M] + sG_e(s)[C_e] + sG_i(s)[C_i] + [K]$$

$$G_e(s) = \frac{30}{s+30} ; G_i(s) = \frac{30}{s+30}$$

$$\{f(s)\} = \frac{1}{s} \cdot \begin{pmatrix} 4,9007 \\ 0 \\ 1,6336 \\ 0 \\ 0,9801 \end{pmatrix}$$

Una vez obtenido los términos de $\{q(s)\}$ de la ecuación anterior se podrá obtener las funciones $\{q(t)\}$ aplicando la inversa de la Transformada de Laplace, y entonces obteniendo los 5 términos de $w(L/2, t)$.

En la figura 6.2 se muestra el desplazamiento del punto medio de la viga en función del tiempo. Se observa la influencia del amortiguamiento con respecto a la viga no amortiguada.

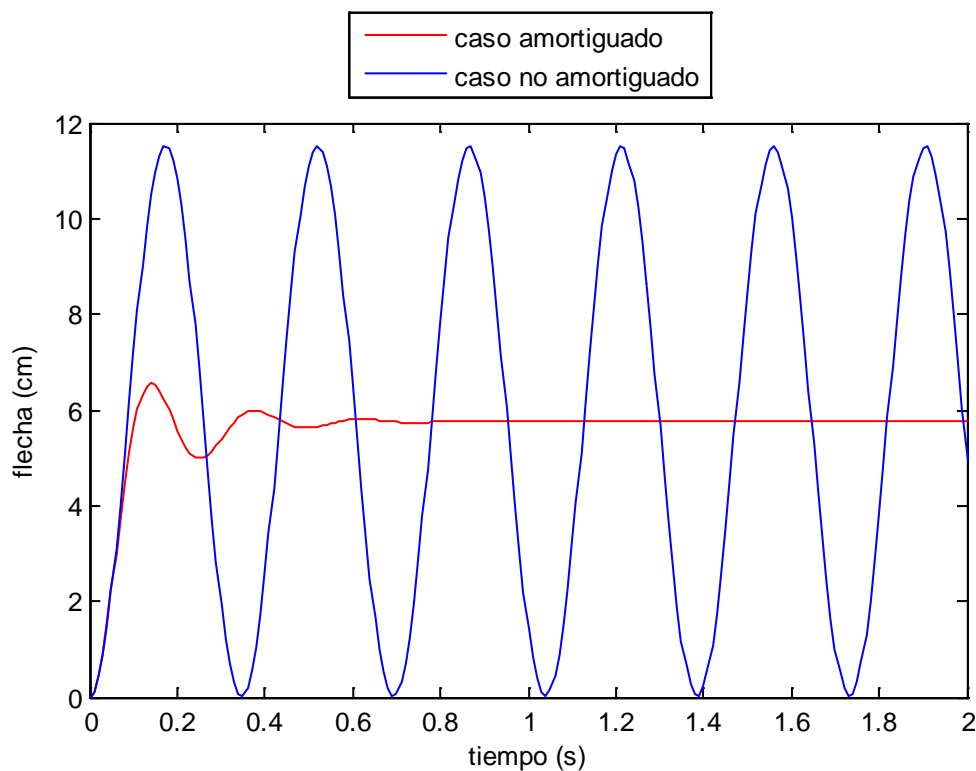


Figura 6.2 Desplazamiento del punto medio para la viga biapoyada

Vibraciones en vigas con amortiguamientos interno y externo

Se procede a calcular el parámetro η en $x=L/2$ a partir de los datos obtenidos en la gráfica anterior. El valor máximo del caso no amortiguado es $w_{\max}^* = 11,4726\text{cm}$ mientras que para el caso amortiguado $w_{\max} = 6,5192\text{cm}$. En este caso el desplazamiento de referencia es $w_{\text{ref}} = 5,7363\text{cm}$. Con estos datos ya se puede obtener la capacidad de amortiguamiento:

$$\eta\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{w_{\max}^* - w_{\max}}{w_{\max}^* - w_{\text{ref}}} = \frac{11,4726 - 6,5192}{11,4726 - 5,7363} = 0,863513 \equiv 86,3513\%$$

(6.13)

6.2.3. Influencia de N

Se va a analizar cómo afecta el número de términos N del método Galerkin, analizando los términos de 2 a 5 y se observa cómo influyen.

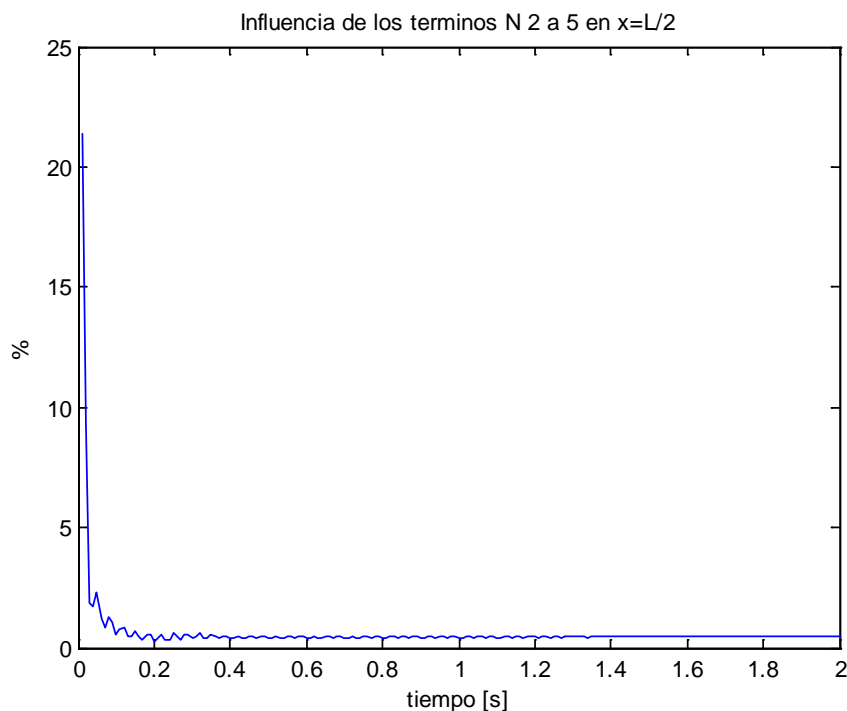


Figura 6.3 Influencia de los términos 2 a 5 al desplazamiento en $x=L/2$

Como se puede observar los términos de 2 a 5 en la viga biapoyada tienen una influencia muy por debajo del 5% del desplazamiento total, por lo tanto la influencia del primer término será muy notable, por lo que se podrá decir que bastaría con analizar este para solucionar el problema.

Por ello a partir de aquí se analizará el problema con $N=1$, simplificando el problema sin perder precisión en la solución. Cabe destacar que en instantes iniciales para los

Vibraciones en vigas con amortiguamientos interno y externo

términos de 2 a 5 hay una influencia notable, pero al ser durante un periodo de tiempo mínimo se depreciará.

Se analizará cómo influye en η de la siguiente manera:

Para $N=1$

$$w(x,t) = \phi(x)q(t) \begin{cases} w_{\max}(x) = \phi(x)q_{\max} \\ w_{\max}^*(x) = \phi(x)q_{\max}^* \\ w_{ref}(x) = \phi(x)q_{\infty} \end{cases} \quad (6.14)$$

$$\eta = \frac{w_{\max}^* - w_{\max}}{w_{\max}^* - w_{ref}} = \frac{\phi(x)(q_{\max}^* - q_{\max})}{\phi(x)(q_{\max}^* - q_{\infty})} = \frac{q_{\max}^* - q_{\max}}{q_{\max}^* - q_{\infty}} = cte \quad (6.15)$$

Para $N \geq 2$

$$w(x,t) = \begin{cases} w_{\max}(x) = \phi_1(x)q_{1\max} + \dots + \phi_n(x)q_{n\max} \\ w_{\max}^*(x) = \phi_1(x)q_{1\max}^* + \dots + \phi_n(x)q_{n\max}^* \\ w_{ref}(x) = \phi_1(x)q_{1\infty} + \dots + \phi_n(x)q_{n\infty} \end{cases} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{[\phi_1(x)q_{1\max}^* + \dots + \phi_n(x)q_{n\max}^*] - [\phi_1(x)q_{1\max} + \dots + \phi_n(x)q_{n\max}]}{[\phi_1(x)q_{1\max}^* + \dots + \phi_n(x)q_{n\max}^*] - [\phi_1(x)q_{1\infty} + \dots + \phi_n(x)q_{n\infty}]} = \\ &= \frac{\phi_1(x)[q_{1\max}^* - q_{1\max}] + \dots + \phi_n(x)[q_{n\max}^* - q_{n\max}]}{\phi_1(x)[q_{1\max}^* - q_{1\infty}] + \dots + \phi_n(x)[q_{n\max}^* - q_{n\infty}]} = \eta(x) \end{aligned} \quad (6.17)$$

Como se observa para términos mayores o iguales que dos el coeficiente de amortiguamiento depende de la posición en la viga, $\eta(x)$, mientras que si sólo se utiliza el primer término se deduce que el coeficiente no depende de su posición en la viga. Se puede afirmar que si se utiliza sólo el primer término es indiferente sobre qué punto se calcula, ya que es independiente:

$$\begin{aligned} N = 1 &\Rightarrow \eta = cte \\ N \geq 2 &\Rightarrow \eta(x) \end{aligned} \quad (6.18)$$

6.2.4. Influencia de H_0

Para este parámetro es lógico pensar que al aumentarle, amortiguará en mayor cantidad, debido a que es proporcional al término de amortiguamiento de la ecuación del movimiento. También hay que tener en cuenta que tenemos dos, uno para externo y otro para amortiguamiento interno, por ello se va a analizar de la siguiente forma.

En primer lugar variaremos H_0 externo en un rango de valores, en el cual se mantendrán todos los demás parámetros iniciales, exceptuando el H_0 interno, al cual le asignaremos unos valores concretos como vemos en la figura 6.4.

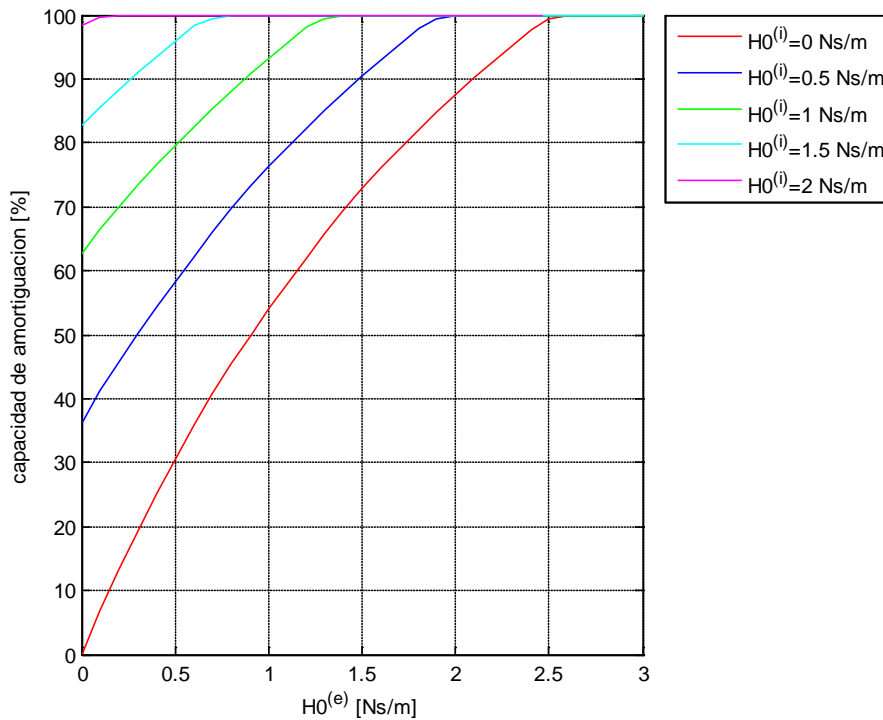


Figura 6.4 Capacidad de amortiguación en función de H_0 externo

En segundo lugar se variará el parámetro H_0 interno, permaneciendo los demás valores iguales, y dando unos valores a H_0 externo en la figura 6.5.

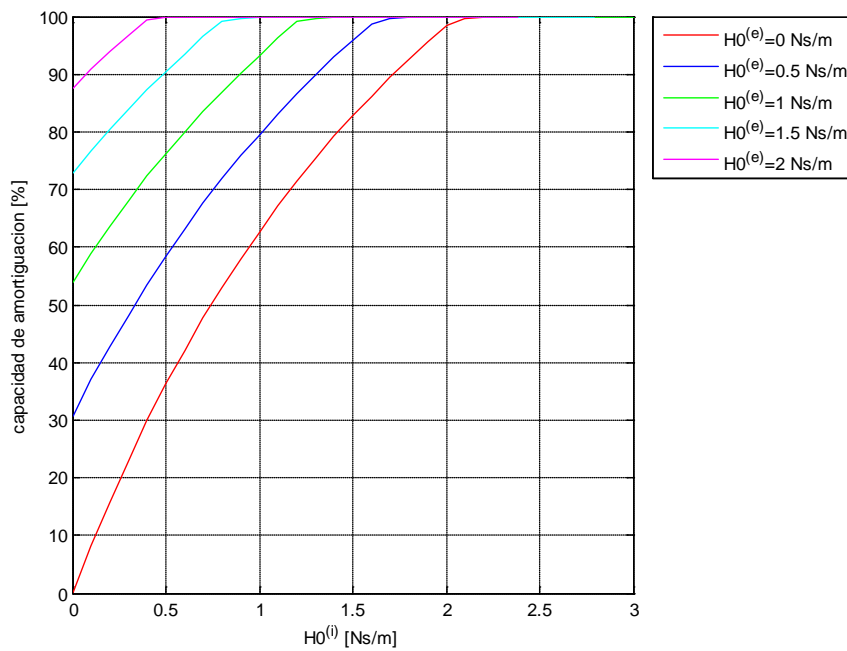


Figura 6.5 Capacidad de amortiguamiento en función de H_0 interno

Se puede observar en las dos gráficas el aumento de la capacidad de amortiguación con respecto al aumento de las dos H_0 , como ya se había deducido antes. Si observamos la figura 6.4 se llega a alcanzar el 100% en todos los casos, y el caso donde el H_0 interno es el inicial se alcanza en valores cercanos a $H_0 = 1,5 \text{ Ns/m}$,

En la figura 6.5 de la misma manera que el anterior se alcanza el 100% de amortiguación, aunque para valores inferiores de H_0 .

6.2.5. Influencia de α

Para este parámetro, como en el anterior hay dos valores, interno y externo, por tanto lo analizaremos de la misma manera.

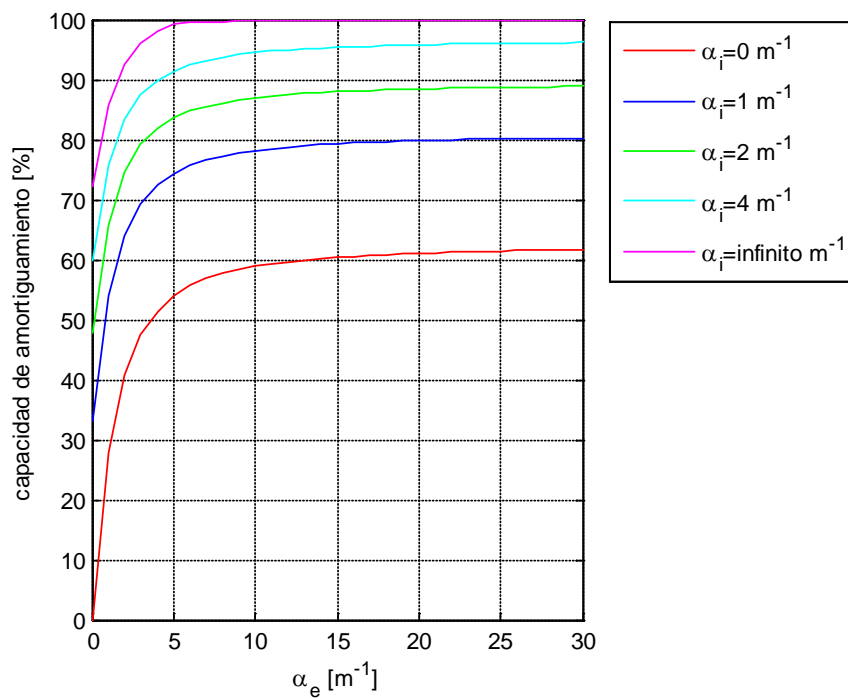


Figura 6.6: Capacidad de amortiguamiento en función de α_e

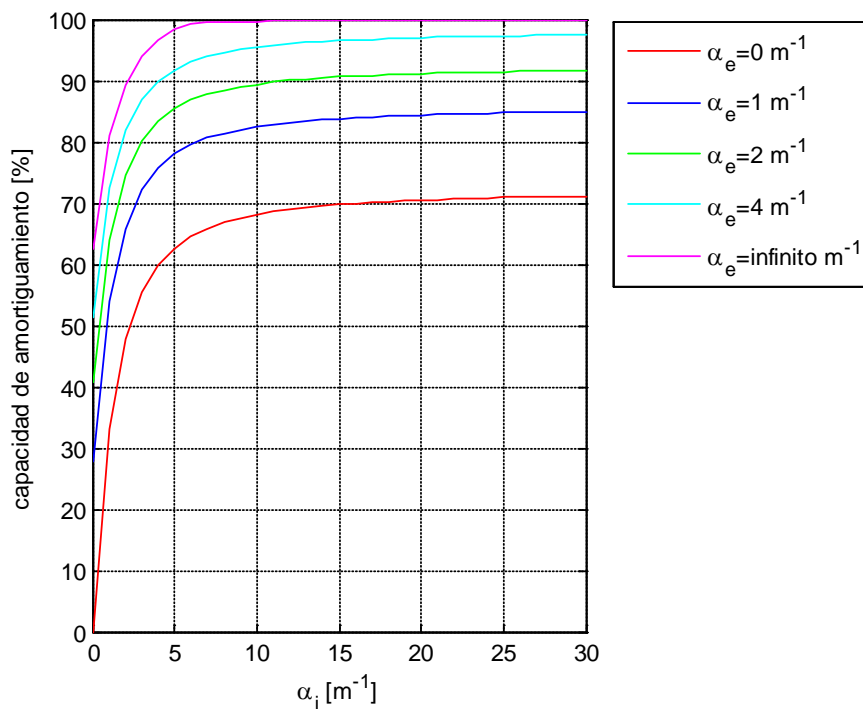


Figura 6.7: Capacidad de amortiguamiento en función de α_i

Se observa en la figura 6.6 que cuando no hay amortiguamiento interno (línea roja) sólo alcanza un valor 62% de capacidad de amortiguamiento, y cuando el valor de α_i se mantiene al inicial alcanza un valor de 98%, cercano al 100% por tanto habría una diferencia notable sin el amortiguamiento interno y con él.

También destacar que a partir de valores superiores habría muy poca variación y serían valores cercanos o incluso 100%.

En la figura 6.7 se analiza la influencia de α_i . Al igual que antes en ausencia de amortiguamiento externo, ($\alpha_e=0$) ronda valores al 71%.

En este parámetro la evolución será de forma asintótica, es decir que a partir de un cierto valor, la capacidad de amortiguamiento no será mayor.

6.2.6 Influencia de μ

Repetimos el mismo sistema que en las dos anteriores, por tanto tendremos dos gráficas

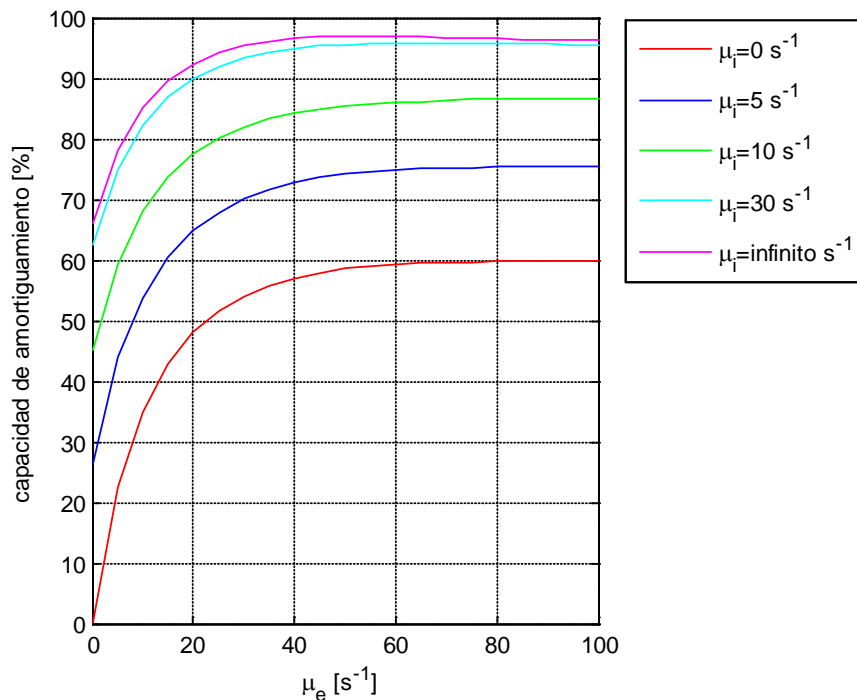


Figura 6.8 Capacidad de amortiguamiento en función de μ_e

Se puede observar que en ninguno de los dos casos se llega al 100% del amortiguamiento, tienen un comportamiento muy parecido, y el valor máximo de amortiguamiento cuando el coeficiente de amortiguamiento tiende a infinito ronda el 97%, muy parecido si se mantuviese el valor inicial (*línea celeste*).

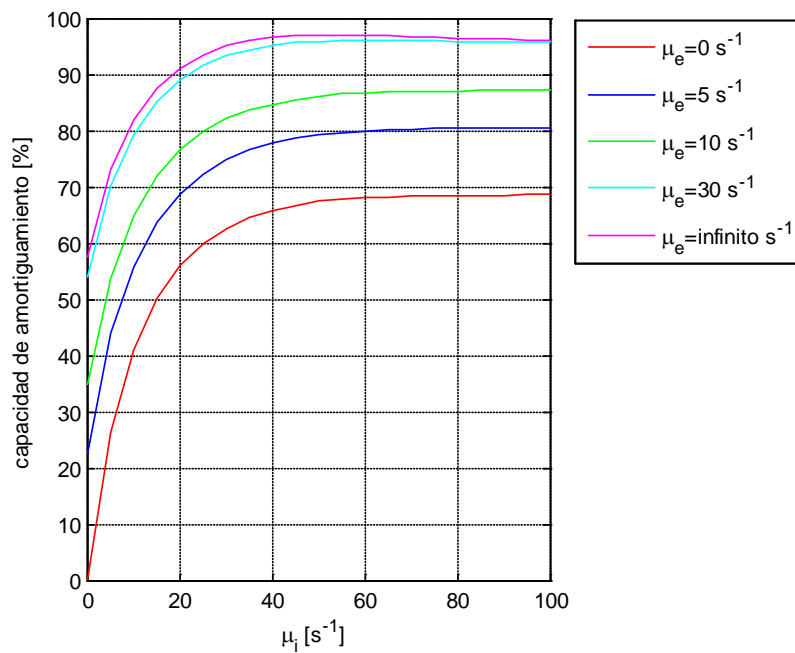


Figura 6.9: Capacidad de amortiguamiento en función de μ_i

6.2.7 Influencia de γ_0

Siendo γ_0 el coeficiente de amortiguamiento interno, en la figura 6.10 se muestra la influencia de este parámetro en la viga. Para este caso variaría desde su valor nulo hasta 0,25 entre valores del 55 y 100%. Dentro del intervalo se encuentra el valor inicial.

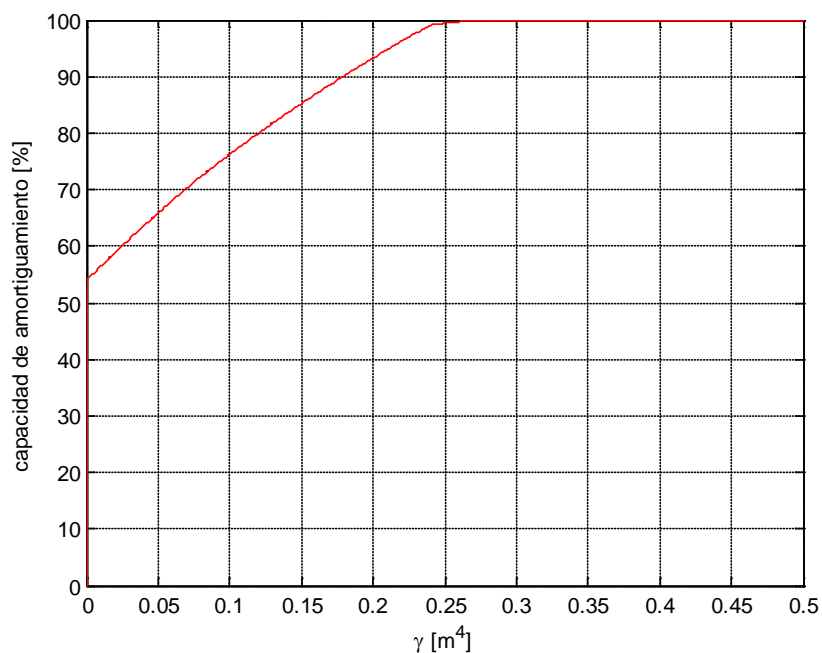


Figura 6.10: Capacidad de amortiguamiento en función de γ_0

6.2.8 Influencia de x_1

El parámetro x_1 es la posición del inicio del amortiguamiento en la viga, por tanto si la longitud de amortiguamiento tiene un valor de un metro, se variará este parámetro en el intervalo $[0,1]$, ya que cuando x_1 se sitúa en 1 el amortiguamiento llegará al final de la viga.

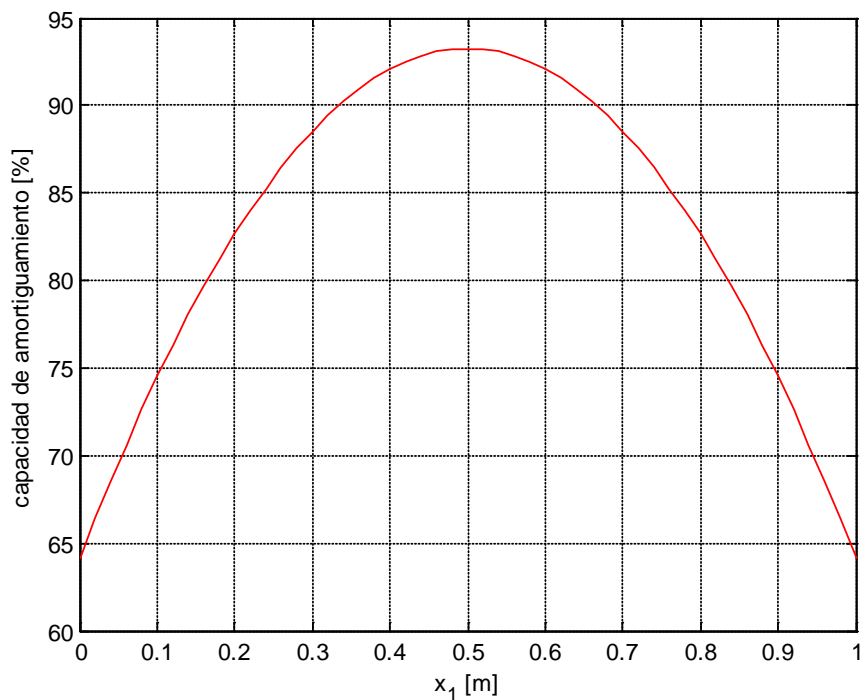


Figura 6.11: Capacidad de amortiguamiento en función de x_1

Se aprecia, como era de esperar, que existe una simetría en la gráfica, ya que la viga estudiada en este caso también lo es, viga biapoyada. También se aprecia que el valor máximo se encuentra cuando x_1 es 0,5m, es decir, el amortiguamiento está centrado, dando como resultado una capacidad de amortiguamiento del 93,2%.

6.2.9 Influencia de (x_2-x_1)

Se toma (x_2-x_1) como la longitud del amortiguamiento, que se variará desde su valor nulo, es decir que no exista amortiguamiento, hasta que este ocupe toda la longitud de la viga ($L=2$).

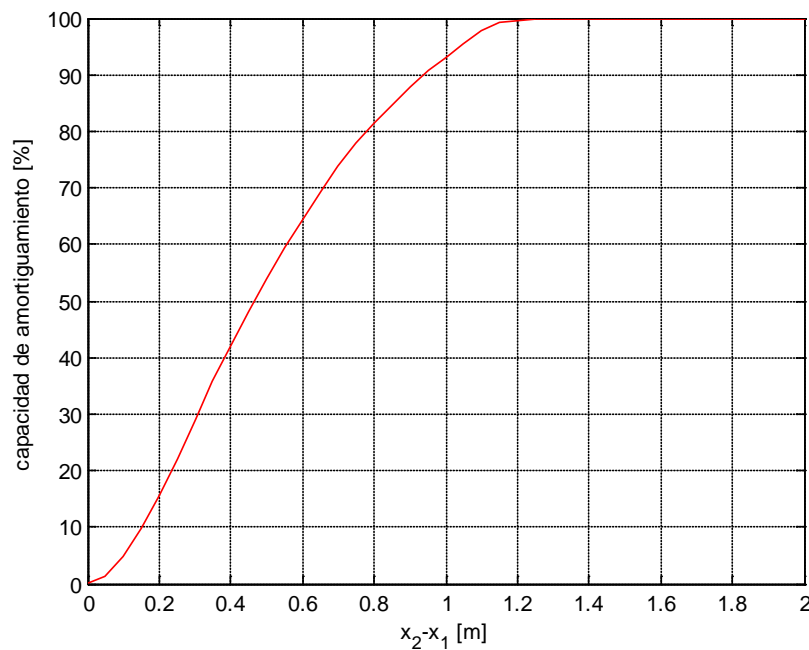


Figura 6.12: Capacidad de amortiguamiento en función de (x_2-x_1)

Como se podría esperar la capacidad de amortiguamiento aumenta proporcionalmente cuando lo hace la región amortiguada, siendo nulo cuando no existe, y llegando a alcanzar el 100% a partir de que el amortiguamiento tenga una longitud de 1,2m., es decir más de la mitad de la viga, a partir de este valor es constante en la máxima capacidad.

6.2.10 Influencia de L

Tomando L como la longitud de la viga y dejando la región amortiguada proporcional a los datos iniciales, es decir tendrá un tamaño de $L/2$, se obtienen los resultados de la figura 6.13, donde una disminución de capacidad de amortiguamiento existirá entre las longitudes 1,95 m y 2,4 m, desde el 100% hasta el cero. Por lo tanto se puede afirmar que si aumentamos la longitud inicial, su capacidad de amortiguamiento se verá disminuida.

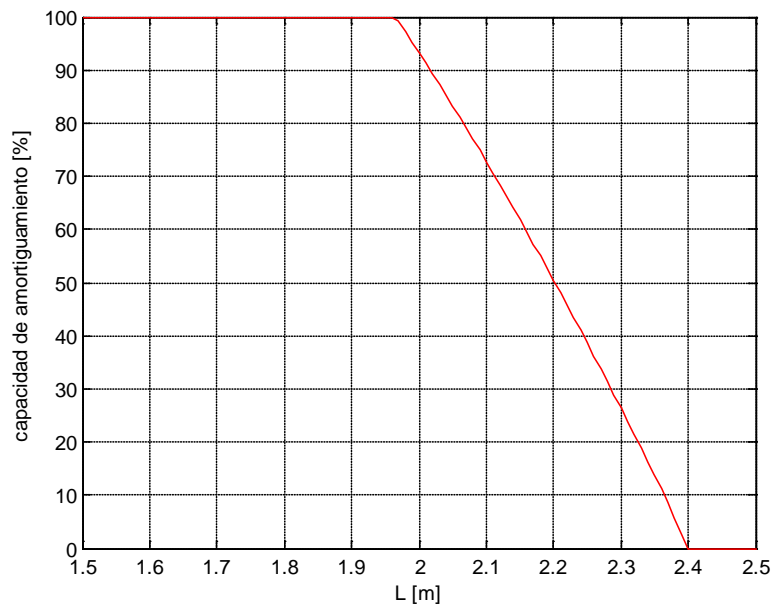


Figura 6.13: Capacidad de amortiguamiento en función de L

6.2.11 Influencia de l

Se define el parámetro l como la longitud transversal de la viga (altura o canto, ya que tiene una sección cuadrada) y se muestra en la figura 6.15 cómo influye en la capacidad de amortiguamiento, la cual variaría entre el intervalo de l entre 4.2-5.1 mm. Afecta de tal manera que al aumentar entre ese intervalo también lo hace la capacidad de amortiguamiento.

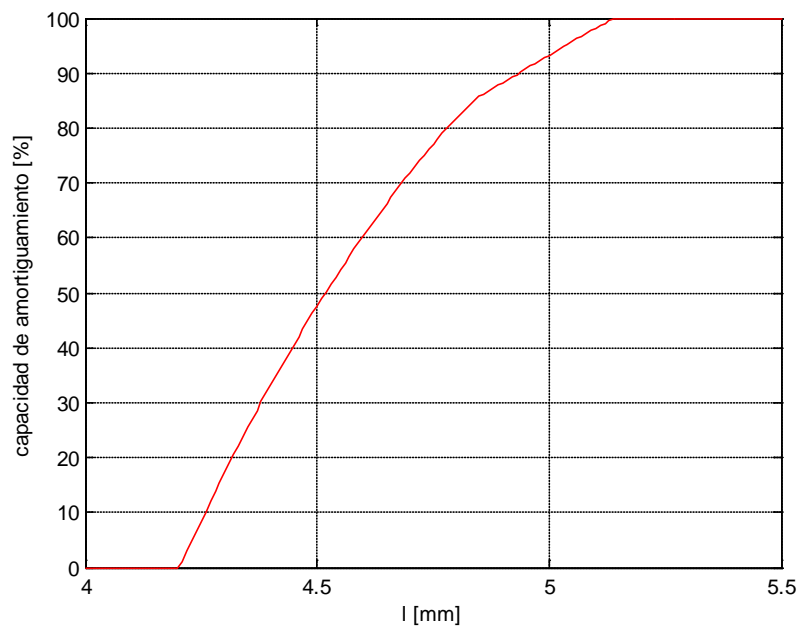


Figura 6.14: Capacidad de amortiguamiento en función de l

6.2.12 Influencia de E

Se observa en la figura 6.16 como al aumentar el módulo de elasticidad del material de la viga, produce mayor capacidad de amortiguamiento en la viga biapoyada, alcanzando su máximo en $E=77$ GPa.

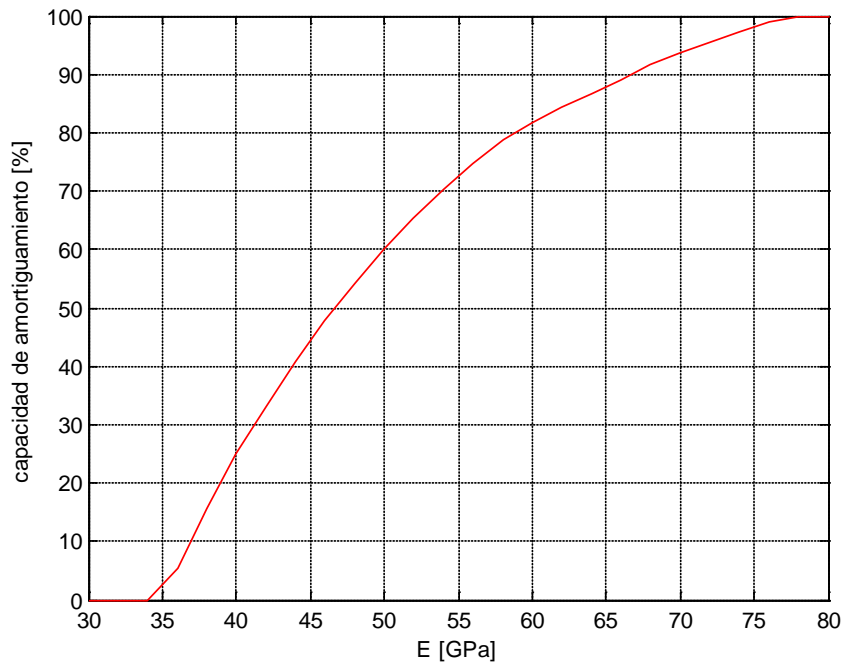


Figura 6.15: Capacidad de amortiguamiento en función de E

6.2.13 Influencia de ρ

El parámetro ρ que es la densidad del material, y al compararla con la capacidad de amortiguamiento, se verá reflejada en la figura 6.17. Como se aprecia, hay un cambio de inclinación en la curva justo en el valor de 2000 kg/m^3 , la cual es decreciente, por tanto si se aumenta la densidad del material se obtiene menor capacidad de amortiguamiento. Se ha calculado para un valor mucho mayor y el resultado no llega a ser nulo.

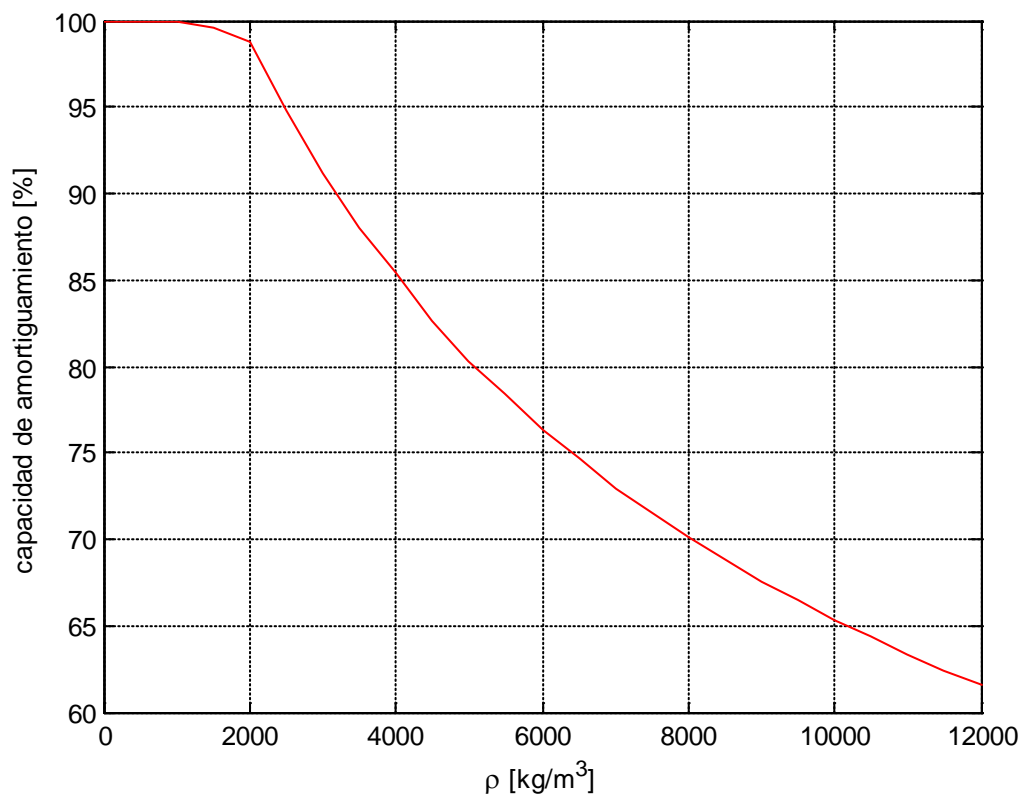


Figura 6.16: Capacidad de amortiguamiento en función de ρ

6.3 . Caso 2: Viga empotramiento-extremo libre

6.3.1. Modos propios no amortiguados

Se procederá a la obtención de los modos propios para una viga empotrada en un extremo y el otro esté libre, es decir una viga en voladizo.

$$\phi_j(x) = A_j \cdot \cos(\eta_j x) + B_j \cdot \sin(\eta_j x) + C_j \cdot \cosh(\eta_j x) + D_j \cdot \sinh(\eta_j x); \quad \eta^4 = \frac{\rho A}{EI} \cdot \omega_j^2 \quad (6.19)$$

$$w(0,t) = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L,t) = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(L,t) = 0 \quad (6.20)$$

Si se impone que existe una solución no nula, y normalizando la expresión obtenemos:

$$\phi_j = \sqrt{\frac{1}{\rho A L}} [\cosh(\eta_j x) - \cos(\eta_j x) - \beta_j \sinh(\eta_j x) + \beta_j \sin(\eta_j x)]; \quad \omega_j = \eta_j^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (6.21)$$

Se obtendrá β_j a través de:

$$\beta_j = \frac{\cosh(\eta_j L) + \cos(\eta_j L)}{\sinh(\eta_j L) + \sin(\eta_j L)} \quad (6.22)$$

Donde $\eta_j L$ son las raíces de la ecuación 6.23

$$1 + \cosh(\eta_j L) \cos(\eta_j L) = 0 \quad (6.23)$$

Obteniendo de ella los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \eta_1 L &= 1,8751 \\ \eta_2 L &= 4,6941 \\ \eta_3 L &= 7,8548 \end{aligned}$$

Con los cuales calcularemos β :

$$\beta_1 = 0,7341$$

$$\beta_2 = 1,0185$$

$$\beta_3 = 0,9992$$

6.3.2. Solución del problema

A continuación se procede a resolver el problema para una viga con un extremo empotrado y el otro libre, y con amortiguamiento externo e interno, donde se ha elegido un total de 3 términos en la serie de Galerkin, $N=3$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

$$K = \begin{pmatrix} 41,733 & 0 & 0 \\ 0 & 7639, & 0 \\ 0 & 0 & 12850 \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

$$C_e = \begin{pmatrix} 3,3087 & 4,6385 & -1,0502 \\ 4,6385 & 8,2183 & 1,0284 \\ -1,0502 & 1,0285 & 4,5624 \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

$$C_i = \begin{pmatrix} 0,5113 & 0,7167 & -0,1622 \\ 28,1507 & 49,8768 & 6,2427 \\ -49,9648 & 48,9436 & 217,0794 \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

Ahora se calculan los términos de la ecuación $[D(s)] \cdot \{q(s)\} = \{f(s)\}$:

$$[D(s)] = s^2[M] + sG_e(s)[C_e] + sG_i(s)[C_i] + [K]$$

$$G_e(s) = \frac{30}{s+30} ; G_i(s) = \frac{30}{s+30}$$

$$\{f(s)\} = \frac{1}{s} \cdot \begin{pmatrix} 4,2621 \\ 2,3620 \\ 1,3849 \end{pmatrix}$$

En la figura 6.17 se muestra el desplazamiento del punto medio de la viga en función del tiempo. Se observa la influencia del amortiguamiento con respecto a la no amortiguada.

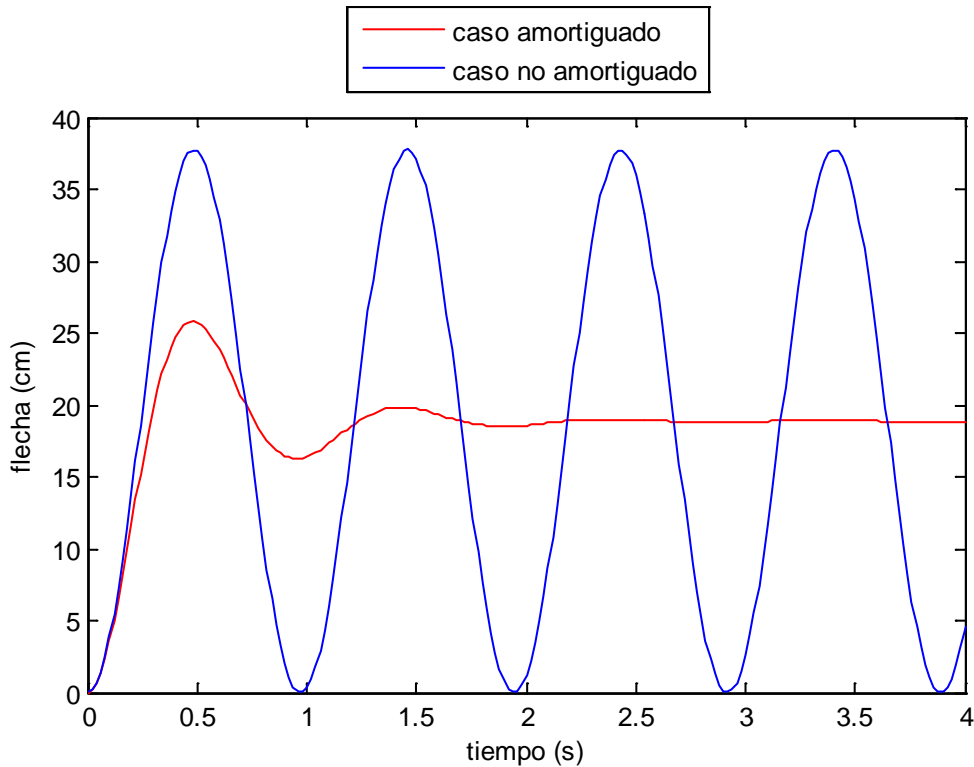


Figura 6.17: Desplazamiento del punto medio para la viga empotramiento-libre

Procedemos a calcular el parámetro η a partir de los datos obtenidos en la gráfica anterior. El valor máximo del caso no amortiguado es $w_{\max}^* = 37,7488 \text{ cm}$ mientras que para el caso amortiguado $w_{\max} = 25,9845 \text{ cm}$. En este caso el desplazamiento de referencia es $w_{\text{ref}} = 18,8744 \text{ cm}$. Con estos datos ya se puede obtener la capacidad de amortiguamiento:

$$\eta \left(x = \frac{L}{2} \right) = \frac{w_{\max}^* - w_{\max}}{w_{\max}^* - w_{\text{ref}}} = \frac{37,7488 - 25,9845}{37,7488 - 18,8744} = 0,623295 \equiv 62,3295\%$$

(6.28)

Se obtiene un amortiguamiento del 62,3295%, que comparado con la viga biapoyada es inferior, por tanto generará un efecto amortiguador menor, habiendo una gran diferencia entre ellos (24%)

6.3.3. Influencia de N

Se va a analizar cómo afecta el número de términos N del método Galerkin, analizando los términos de 2 a 3 y observando como influyen (figura 6.18):

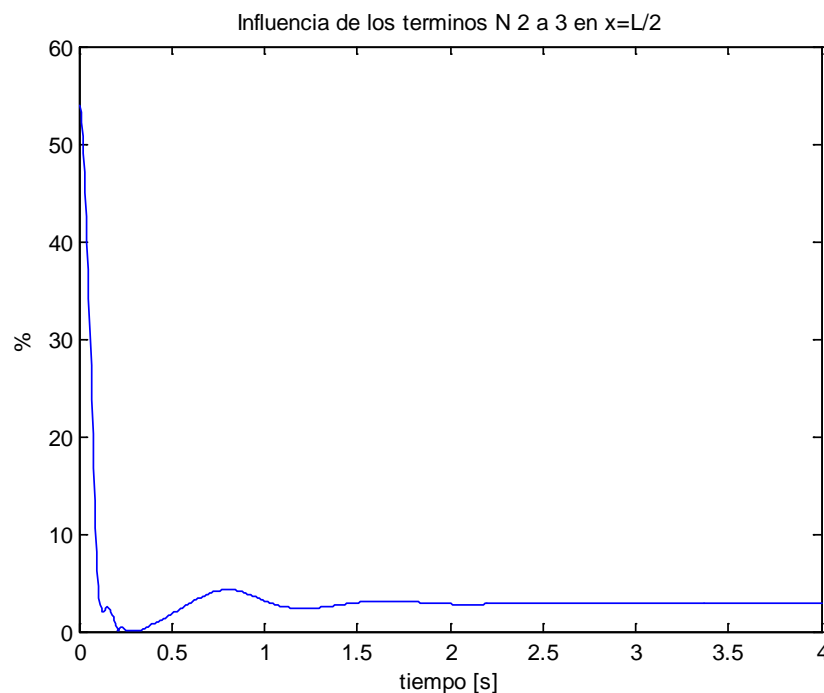


Figura 6.18: Influencia de los términos N 2 a 3 en $x=L/2$

Como se puede observar los términos de 2 a 3 en la viga analizada tienen una influencia muy por debajo del 3% del desplazamiento total, por lo tanto la influencia del primer término será muy notable, por lo que se podrá concluir que bastaría con analizar este para solucionar el problema. Como ocurría en el primer caso se analizará el problema con $N=1$, simplificando el problema sin perder precisión en la solución.

Además como vimos anteriormente si analizamos el problema en $N=1$ también sería indiferente el punto de solución, ya que la capacidad de amortiguamiento es independiente del punto de cálculo.

6.3.4. Influencia de H_0

En la figura 6.19 se muestra el parámetro H_0 externo y su influencia amortiguadora en la viga, donde se obtienen valores muy parecidos a la hora de variar el interno, consiguiendo la máxima amortiguación en valores mayores de 2.5 Ns/m.

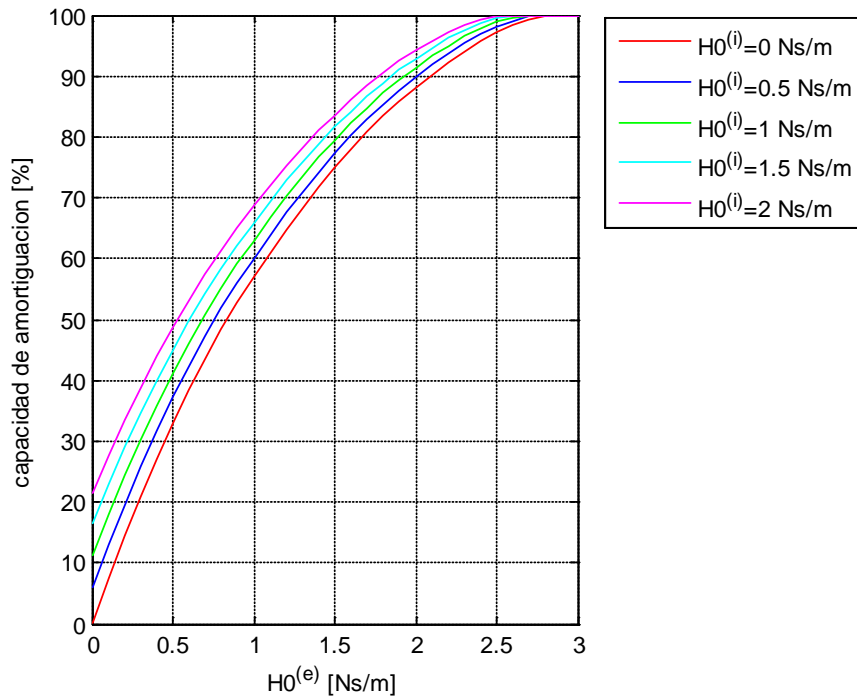


Figura 6.19: Capacidad de amortiguamiento en función de H_0 externo

La figura 6.20 nos muestra cómo se necesitan valores más elevados de H_0 interno para poder conseguir la máxima capacidad de amortiguamiento. En el caso que H_0 externo sea 1 Ns/m valores a partir de 12.

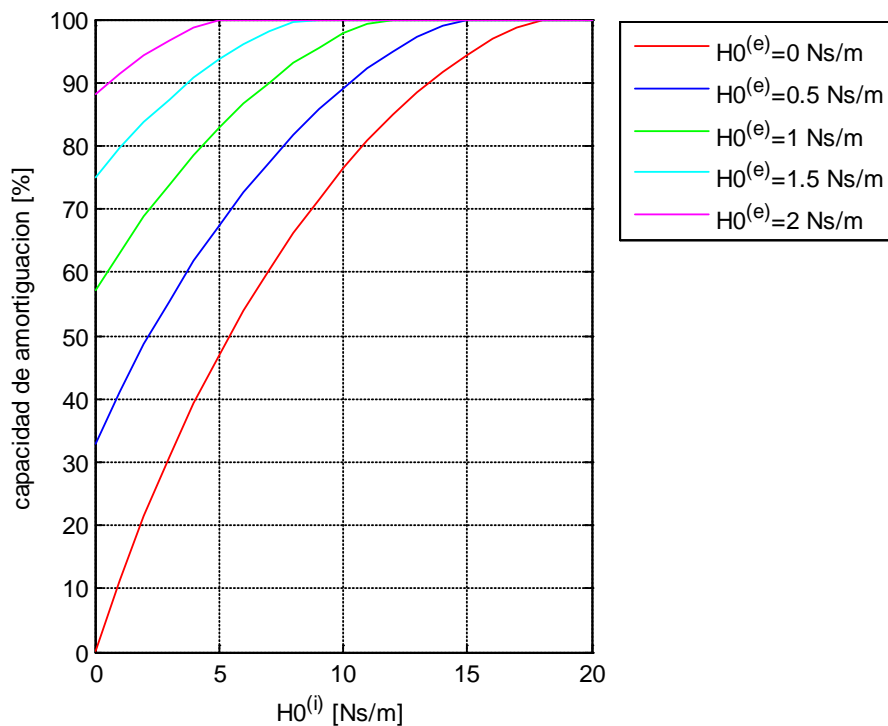


Figura 6.20: Capacidad de amortiguamiento en función de H_0 interno

6.3.5 Influencia de α

En la figura 6.21 se observa cómo influye el parámetro α_e en la capacidad de amortiguamiento, se ve como los valores tienden a un intervalo entre el 68 y 76 % aproximadamente cuando el parámetro α_i es nulo o tiende a infinito.

En la figura 6.22 se aprecia una conducta muy diferente, obteniéndose un máximo del 76%, pero si α_e disminuye, la capacidad de amortiguamiento se vería afectada, disminuyendo su valor hasta un valor del 15 %. Se observa como sigue una evolución asintótica.

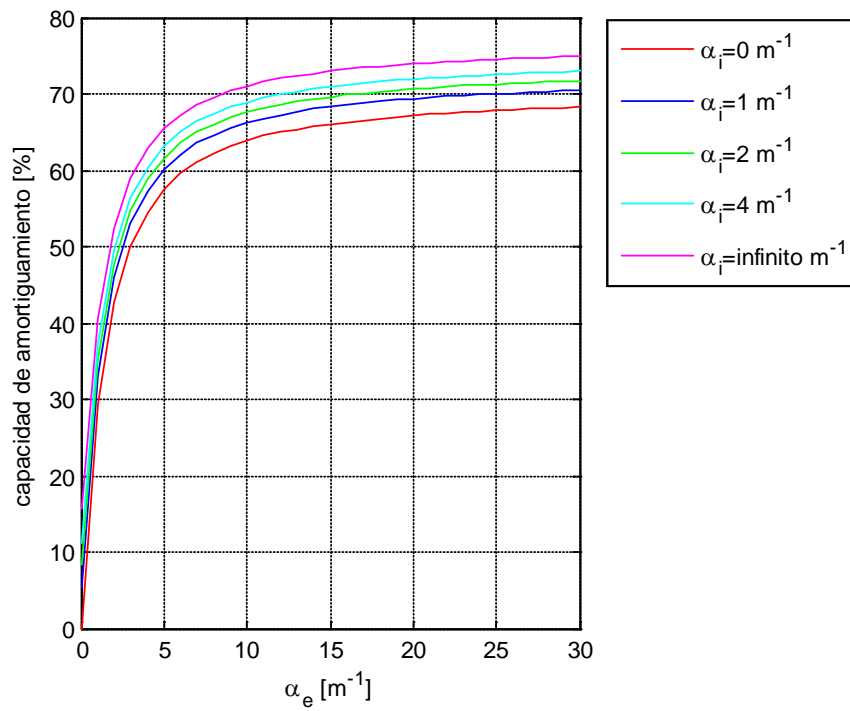


Figura 6.21: Capacidad de amortiguamiento en función de α_e

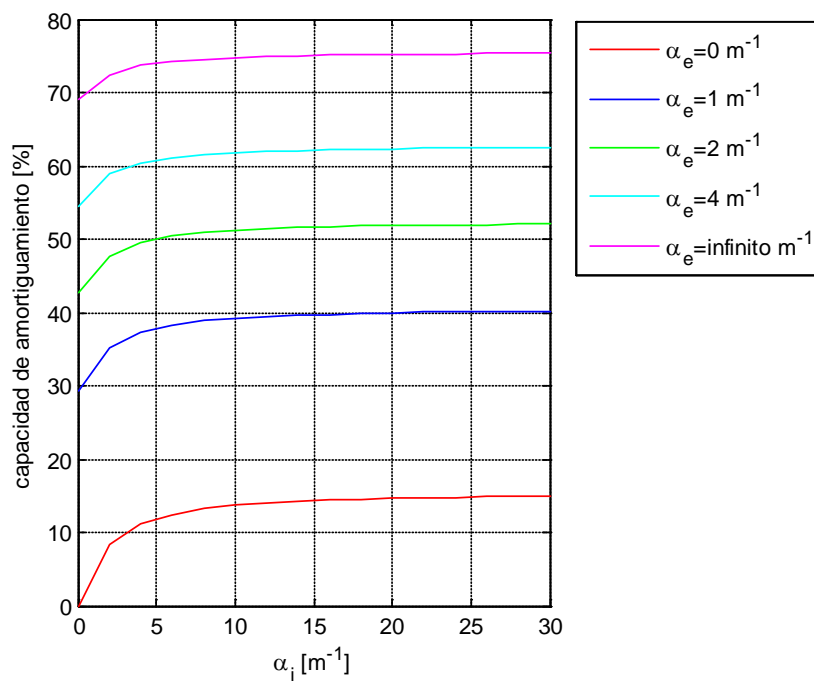


Figura 6.22: Capacidad de amortiguamiento en función de α_i

6.3.6 Influencia de μ

Se observa en la figura 2.23 y 2.24 la influencia de los parámetros μ en la capacidad de amortiguamiento de la viga estudiada en este caso.

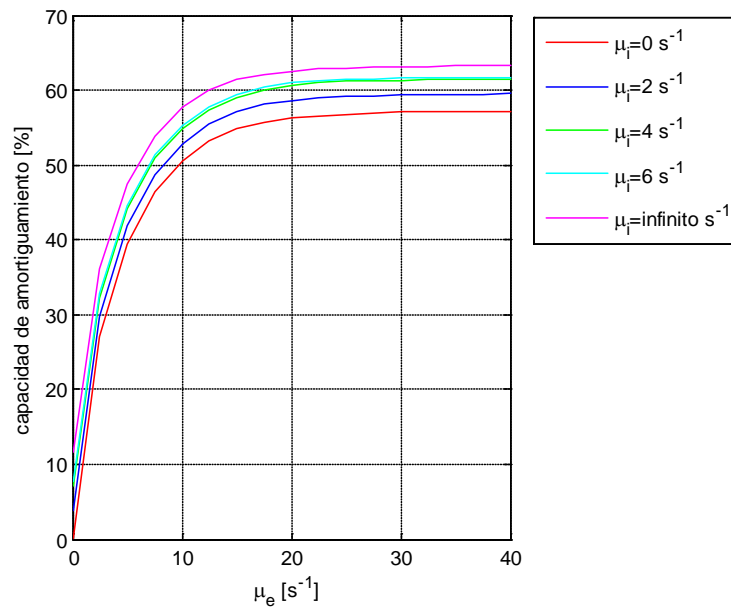


Figura 6.23: Capacidad de amortiguamiento en función de μ_e

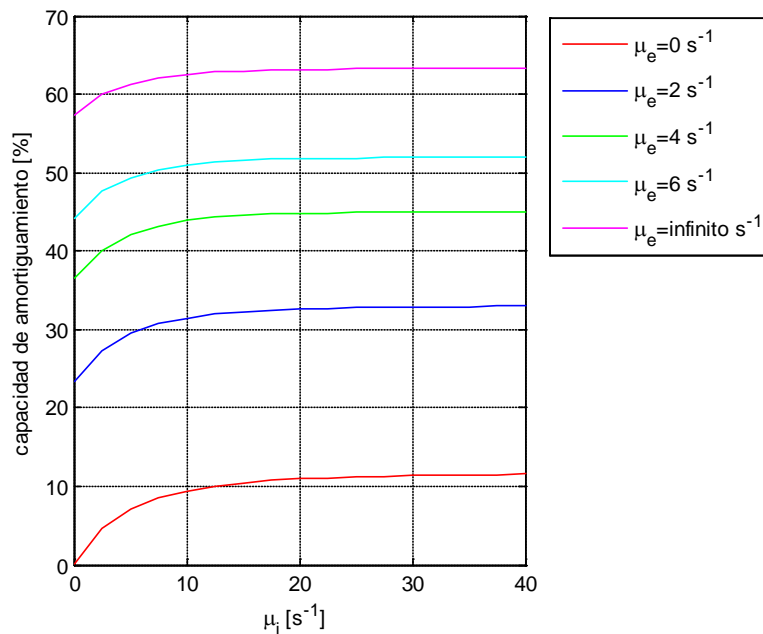


Figura 6.24: Capacidad de amortiguamiento en función de μ_i

6.3.7 Influencia de γ_0

Se obtiene una capacidad de amortiguamiento tal como la que indica la figura 6.25. Cuando se varía el coeficiente de amortiguamiento interno, se aprecia una diferencia con respecto al caso de una viga biapoyada, el cual conseguía el 100% para valores más inferiores.

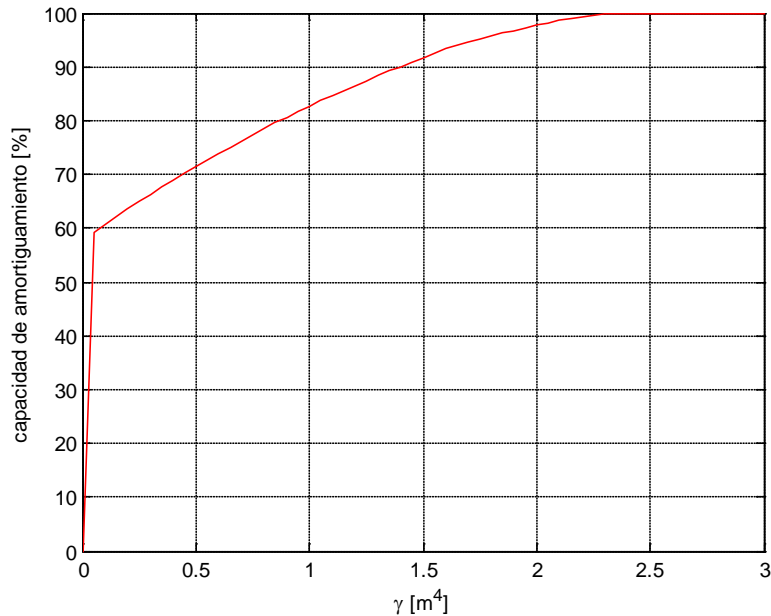


Figura 6.25: Capacidad de amortiguamiento en función de γ_0

6.3.8 Influencia de x_1

En este caso la capacidad de amortiguamiento en función de x_1 al no ser simétrica la viga, la grafica tampoco lo será. Se conseguirá un amortiguamiento del 100% cuando la zona amortiguada se encuentre a 84 cm del extremo izquierdo.

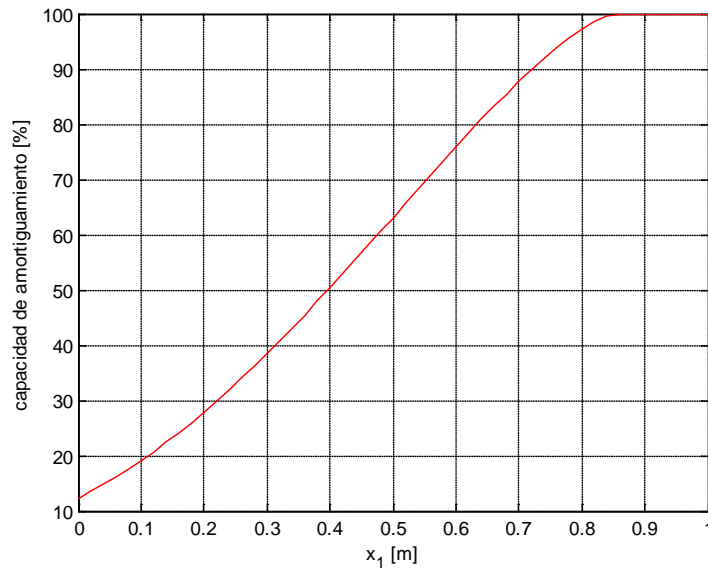


Figura 6.26: Capacidad de amortiguamiento en función de x_1

6.3.9 Influencia de $(x_2 - x_1)$

En la figura 2.27 se observa, como es lógico, el aumento de la capacidad de amortiguamiento, al hacerlo el de la zona amortiguada. Alcanza su máximo cuando ocupa 1,6 metros de la barra.

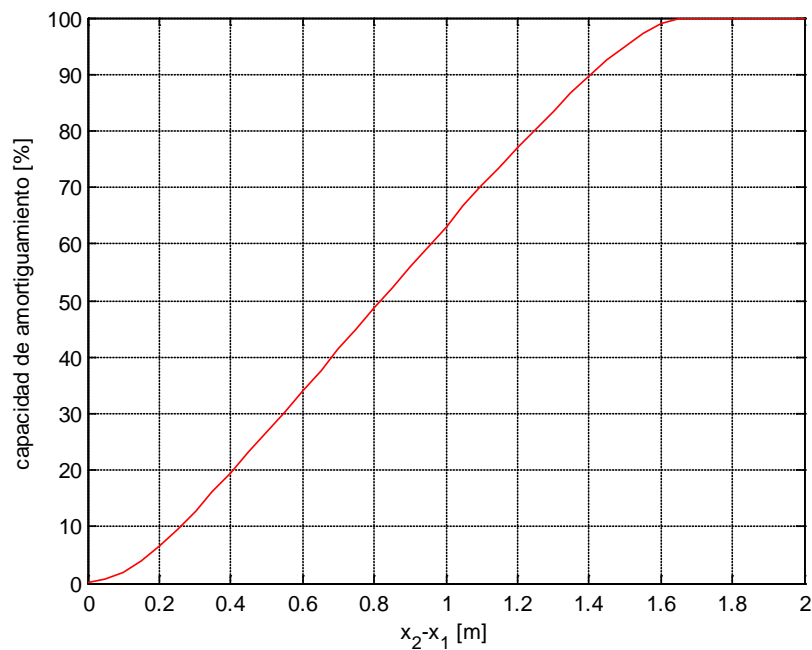


Figura 6.27: Capacidad de amortiguamiento en función de $(x_2 - x_1)$

6.3.10 Influencia de L

En este caso de nuevo se observa un intervalo por el cual disminuye la capacidad de amortiguamiento en función de la longitud de la viga, este se encuentra situado entre 1,6 y 2,6.

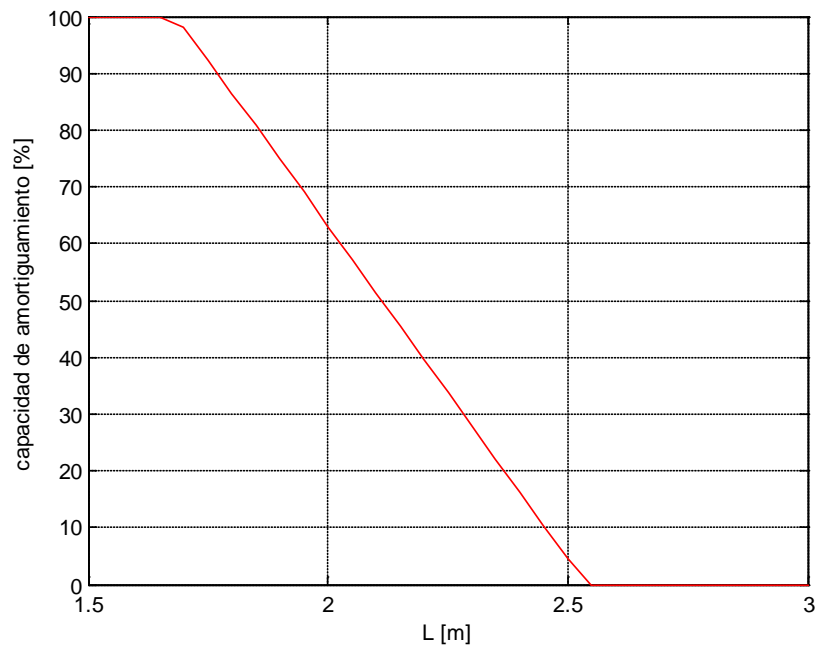


Figura 6.28: Capacidad de amortiguamiento en función de L

6.3.11 Influencia de l

En la figura 6.29 se muestra como a partir de un valor de $l=4$ mm, donde la capacidad amortiguadora es nula. Si se aumenta su valor, también lo hará la capacidad hasta llegar a su valor máximo en 5,55 mm.

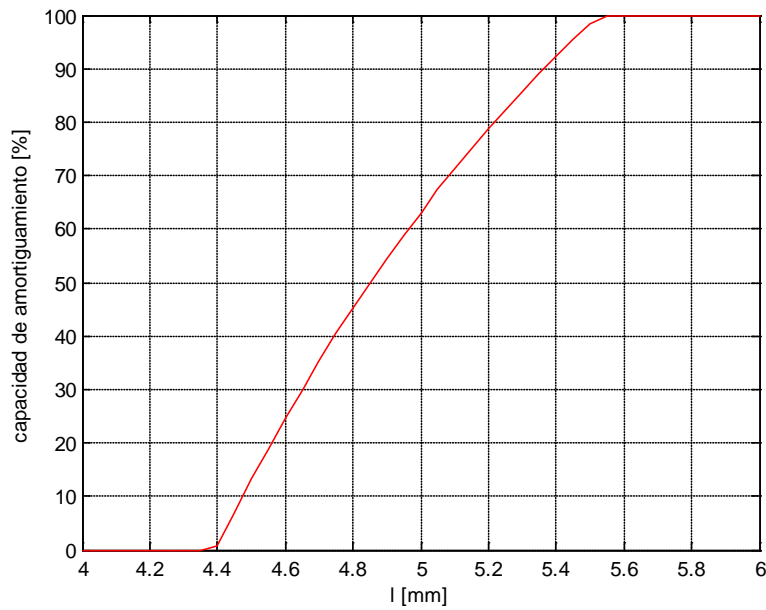


Figura 6.29: Capacidad de amortiguamiento en función de l

6.3.12 Influencia de E

En la figura 6.30 se muestra que un aumento del módulo de elasticidad origina una mayor capacidad de amortiguamiento en la estructura.

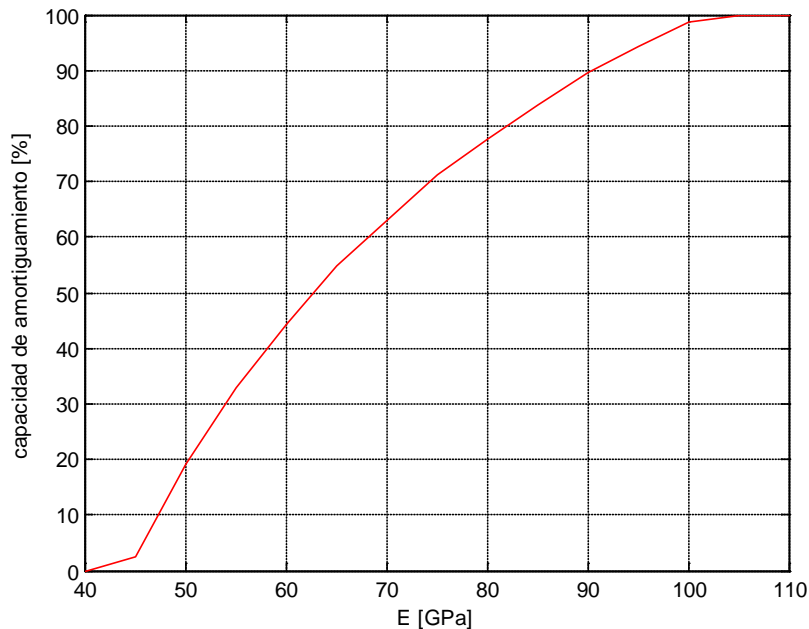


Figura 6.30: Capacidad de amortiguamiento en función de E

6.3.13 Influencia de ρ

Observamos a continuación cómo de la misma manera que en el caso de una viga biapoyada, la densidad, al aumentar, crea una disminución en su capacidad, debido a si el material es más denso implicará que los desplazamientos serán menores por lo tanto habrá menos energía que amortiguar.

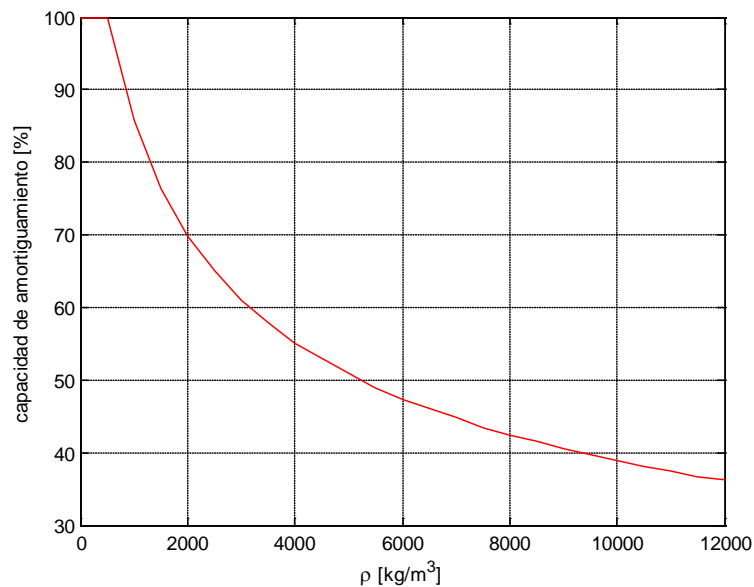


Figura 6.31: Capacidad de amortiguamiento en función de ρ

6.4 . Caso 3: Viga empotramiento-apoyo

6.4.1. Modos propios no amortiguados

Se procederá a la obtención de los modos propios para una viga empotrada en un extremo y con un apoyo en el otro, con sus condiciones iniciales de contorno.

$$\phi_j(x) = A_j \cdot \cos(\eta_j x) + B_j \cdot \sin(\eta_j x) + C_j \cdot \cosh(\eta_j x) + D_j \cdot \sinh(\eta_j x); \quad \eta^4 = \frac{\rho A}{EI} \cdot \omega_j^2 \quad (6.29)$$

$$w(0,t) = w(L,t) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L,t) = 0 \quad (6.30)$$

Si se impone que exista una solución no nula, y normalizando la expresión se obtiene:

$$\phi_j = \sqrt{\frac{1}{\rho A L}} [\cos(\eta_j x) - \cosh(\eta_j x) - \beta_j \sin(\eta_j x) + \beta_j \sinh(\eta_j x)] \quad ; \quad \omega_j = \eta_j^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (6.31)$$

Obteniendo β_j a través de:

$$\beta_j = \frac{\cos(\eta_j L) - \cosh(\eta_j L)}{\sin(\eta_j L) - \sinh(\eta_j L)} \quad (6.32)$$

Donde $\eta_j L$ son las raíces de la ecuación 6.32

$$\cos(\eta_j L) + \cosh(\eta_j L) - \beta_j (\sin(\eta_j L) + \sinh(\eta_j L)) = 0 \quad (6.33)$$

Obteniendo de ella los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \eta_1 L &= 3,9266 \\ \eta_2 L &= 7,0686 \\ \eta_3 L &= 10,2102 \\ \eta_4 L &= 13,3518 \end{aligned}$$

Con los cuales se calculará β :

$$\beta_1 = 1,000777311907$$

$$\beta_2 = 1,000001449897$$

$$\beta_3 = 1,0000000002707$$

$$\beta_4 = 1,0000000000005$$

6.4.2. Solución del problema

A continuación se procede a resolver el problema para una viga con un extremo empotrado y el otro con un apoyo, y con amortiguamiento externo e interno, donde se ha elegido un total de 4 términos en la serie de Galerkin, $N=4$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

$$K = \begin{pmatrix} 802,49 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8427,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36686 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 107280 \end{pmatrix} \quad (6.35)$$

$$C_e = \begin{pmatrix} 10,0692 & 2,2020 & -3,4963 & 0,2867 \\ 2,2020 & 4,7952 & 0,4867 & -3,1634 \\ -3,4963 & 0,4867 & 3,0021 & -0,5738 \\ -0,2867 & -3,1634 & -0,5738 & 3,0230 \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

$$C_i = \begin{pmatrix} 29,9207 & 6,5433 & -10,3894 & 0,8510 \\ 68,7166 & 149,6395 & 15,1868 & -98,7187 \\ -474,9589 & 66,11021 & 407,8187 & -77,9539 \\ 113,9029 & -1256,6817 & -227,9607 & 1200,9007 \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

Ahora se va a calcular los términos de la ecuación $[D(s)] \cdot \{q(s)\} = \{f(s)\}$:

$$[D(s)] = s^2[M] + sG_e(s)[C_e] + sG_i(s)[C_i] + [K]$$

$$G_e(s) = \frac{30}{s+30} ; G_i(s) = \frac{30}{s+30}$$

$$\{f(s)\} = \frac{1}{s} \cdot \begin{pmatrix} -4,6813 \\ -0,4498 \\ -1,8202 \\ -0,2388 \end{pmatrix}$$

En la figura 6.32 se muestra el desplazamiento del punto medio de la viga en función del tiempo. Se observa la influencia del amortiguamiento con respecto a la no amortiguada.

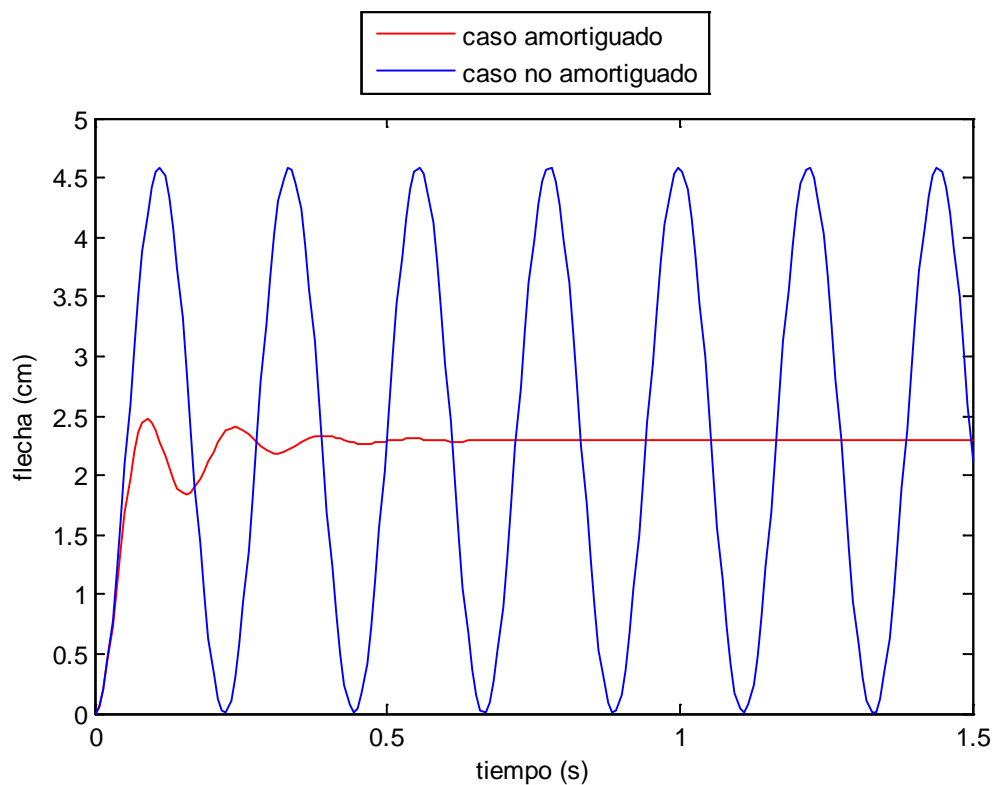


Figura 6.32: Desplazamiento del punto medio para la viga empotramiento-apoyo

Se calcula el parámetro η a partir de los datos obtenidos en la gráfica anterior. El valor máximo del caso no amortiguado es $w_{\max}^* = 4,5876 \text{ cm}$, mientras que para el caso

amortiguado $w_{\max} = 2,6886\text{cm}$. En este caso el desplazamiento de referencia es $w_{\text{ref}} = 2,2939\text{cm}$. Con estos datos ya se puede obtener la capacidad de amortiguamiento:

$$\eta\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{w_{\max}^* - w_{\max}}{w_{\max}^* - w_{\text{ref}}} = \frac{4,5876 - 2,6866}{4,5876 - 2,2939} = 0,827879 \equiv 82,7879\%$$

(6.38)

6.4.3 Influencia de N

Se va a analizar cómo afecta el número de términos N del método Galerkin, analizando los términos de 2 a 4 y observando como influyen en la figura 6.33:

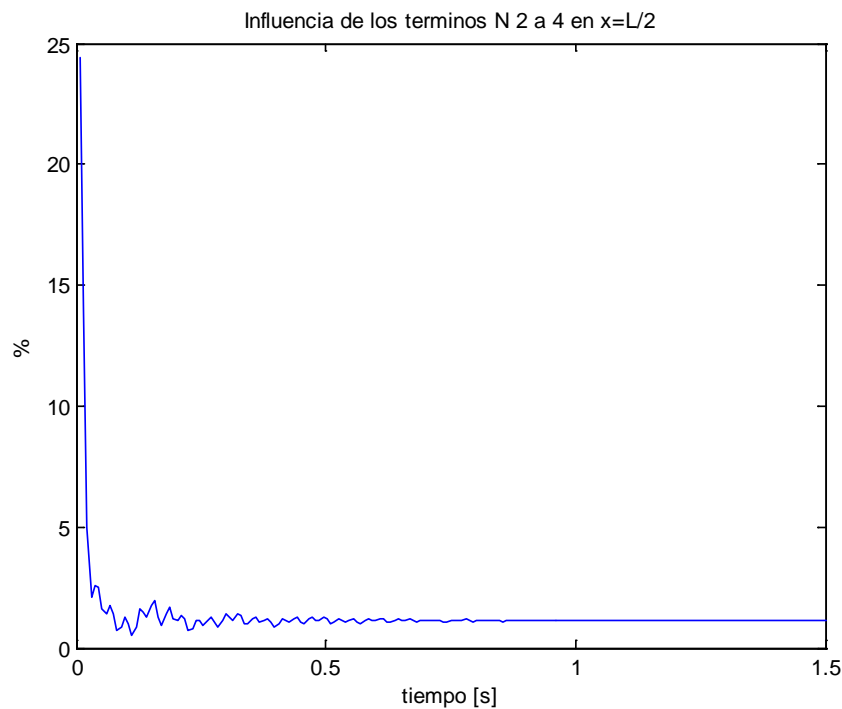


Figura 6.33: Influencia de los términos N 2 a 4 en $x=L/2$

Como se puede observar los términos de 2 a 4 en la viga analizada tienen una influencia aproximada del 3% del desplazamiento total, por lo tanto la influencia del primer término será muy notable, por lo que podremos decir que bastaría con analizar este para solucionar el problema. Como ocurría en casos anteriores analizaremos el problema con $N=1$, simplificando el problema sin perder precisión en la solución.

6.4.4 Influencia de H_0

Las figuras 6.34 y 6.35 nos muestran la importancia del parámetro H_0 y cómo afecta de distinta forma cuando este actúa en el amortiguamiento interno o externo. Se toma de ejemplo las líneas de color azul $H_0=0,5$ Ns/m, mientras en el caso de que fuese este valor interno, su capacidad sería máxima con un valor de su homónimo de 3,5 Ns/m; por el otro lado sería un valor de 1,5 Ns/m, reduciéndose el valor a más de la mitad.

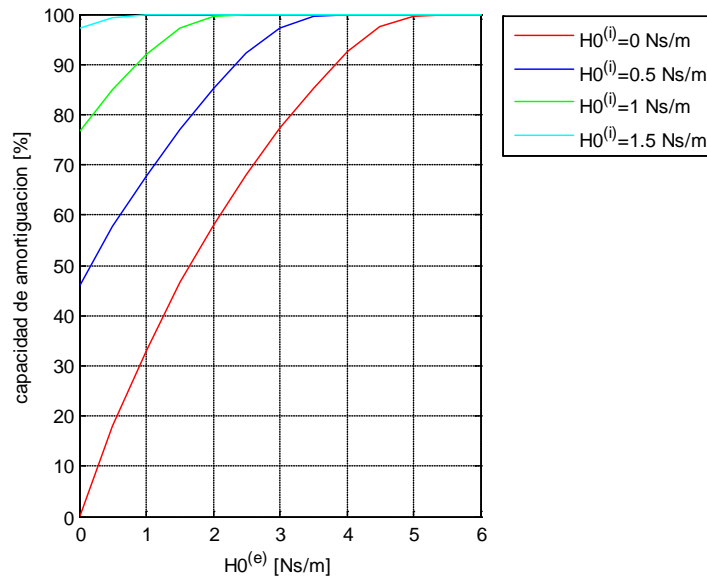


Figura 6.34: Capacidad de amortiguamiento en función de H_0 externo

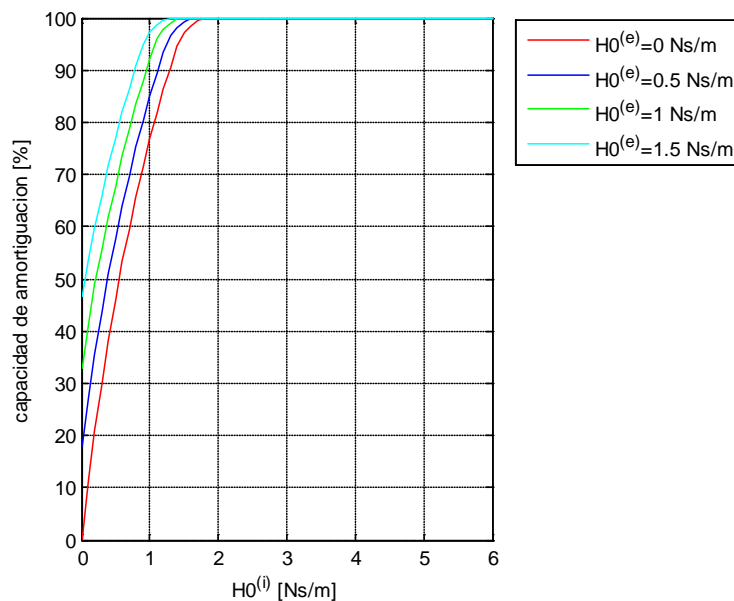


Figura 6.35: Capacidad de amortiguamiento en función de H_0 interno

6.4.5 Influencia de α

Se han obtenido las capacidades de amortiguamiento en función de α , obteniendo los siguientes resultados:

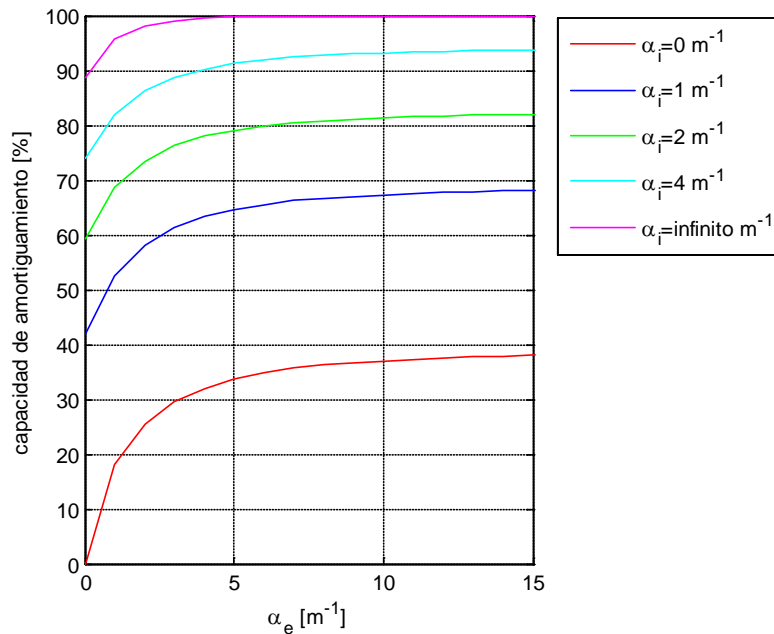


Figura 6.36: Capacidad de amortiguamiento en función de α_e

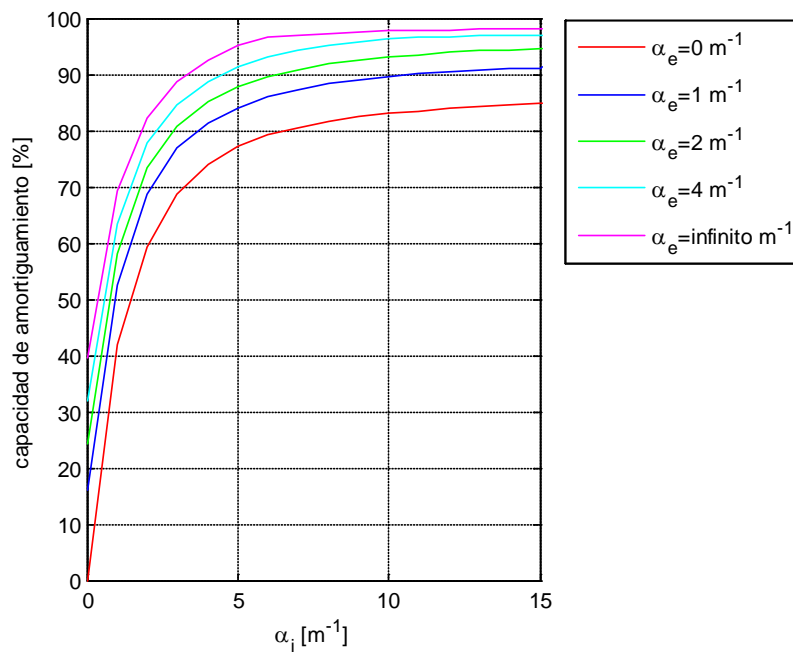


Figura 6.37: Capacidad de amortiguamiento en función de α_i

6.4.6 Influencia de μ

Las figuras 6.38 y 6.39 revelan el comportamiento según μ para los cuales se obtendrán las siguientes capacidades de amortiguamiento.

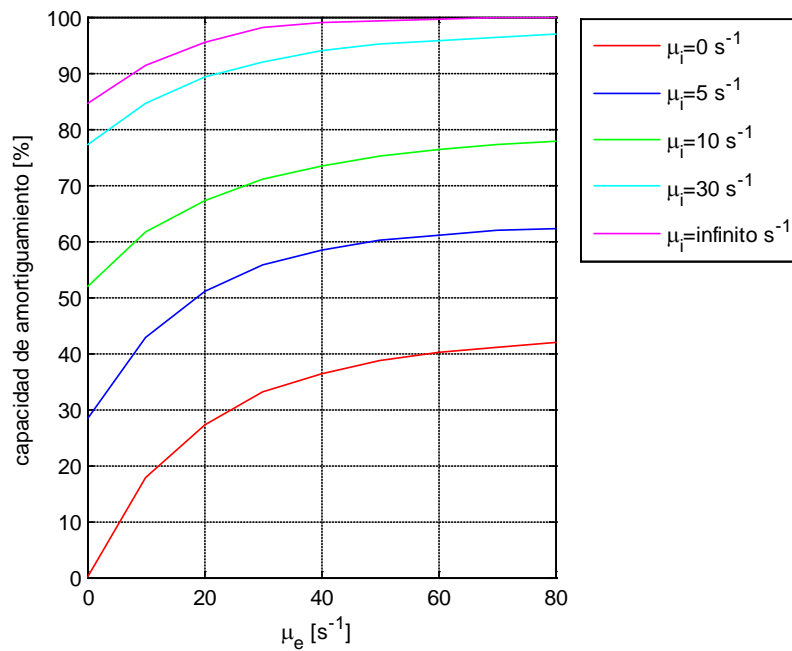


Figura 6.38: Capacidad de amortiguamiento en función de μ_e

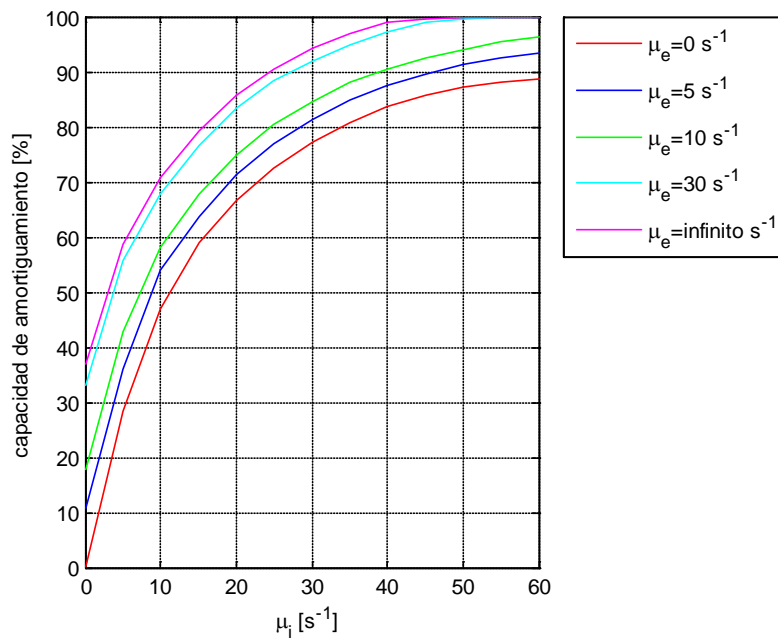


Figura 6.39: Capacidad de amortiguamiento en función de μ_i

6.4.7 Influencia de γ_0

Se obtiene una capacidad de amortiguamiento tal como la que indica la figura 6.40, cuando variamos el coeficiente de amortiguamiento interno. Se aprecia que vuelve a tener valores similares a los obtenidos en el primer caso.

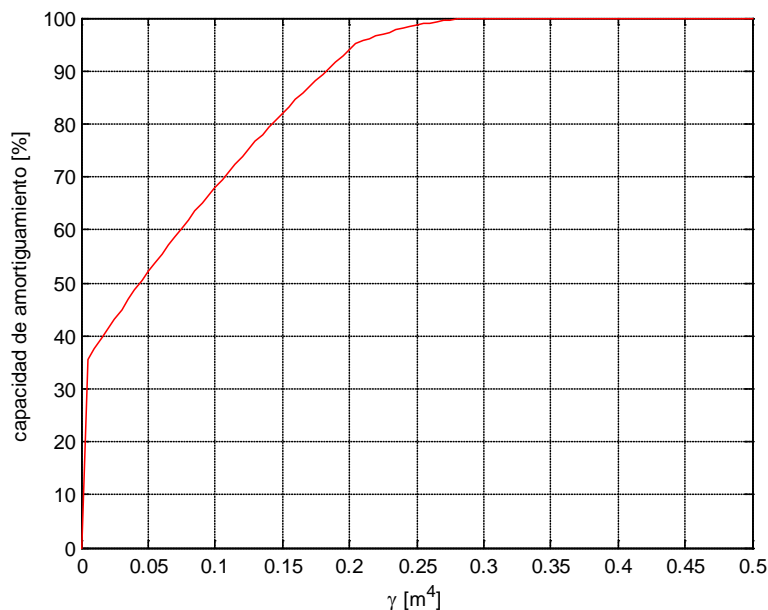


Figura 6.40: Capacidad de amortiguamiento en función de γ_0

6.4.8 Influencia de x_1

Se observa en la figura 6.41 cómo se consigue una gráfica con forma de parábola, en la cual se representa la influencia que ejerce la posición del amortiguamiento dentro de la viga. En este caso no es simétrica como en el caso 1. Esto se esperaba, ya que la viga estudiada en este caso tampoco lo es. Se obtiene un máximo de un 95% en el valor de $x_1=65$ cm.

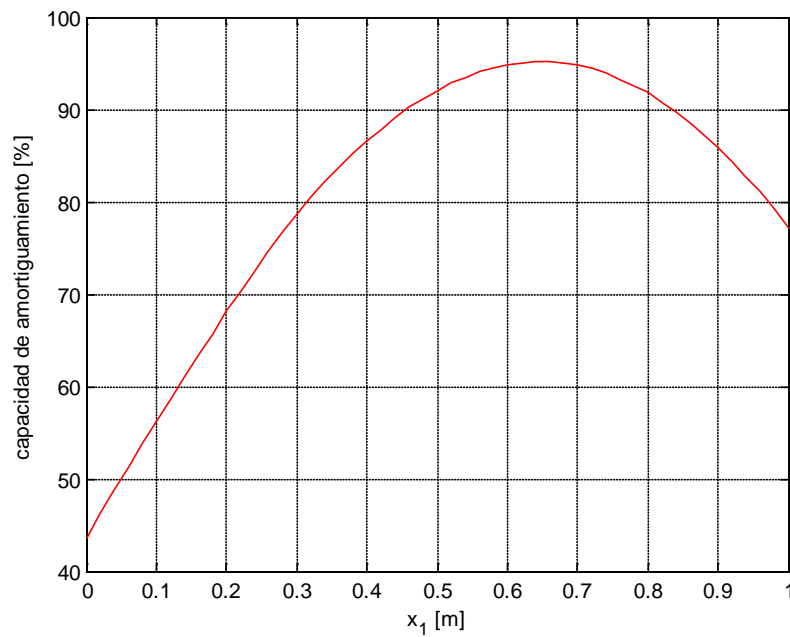


Figura 6.41: Capacidad de amortiguamiento en función de x_1

6.4.9 Influencia de (x_2-x_1)

Resolviendo el problema para distintas longitudes de amortiguamiento se obtienen los datos reflejados en la figura 6.42.

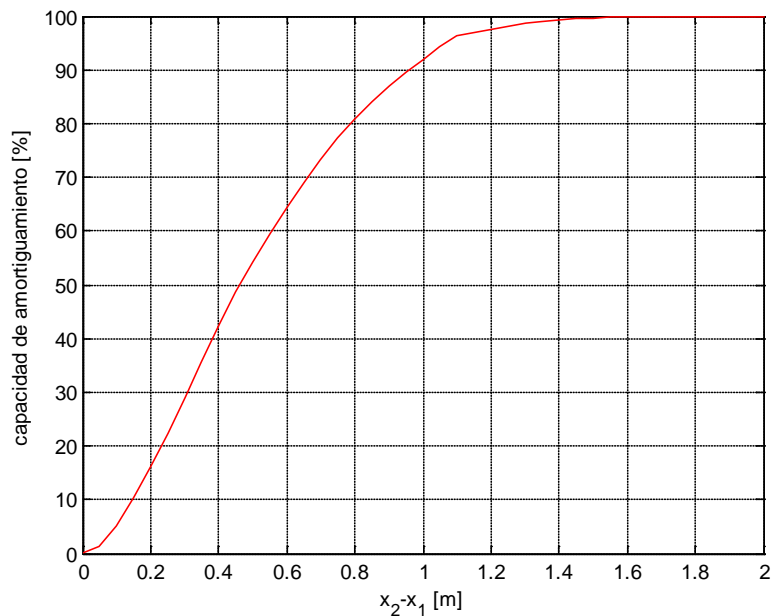


Figura 6.42: Capacidad de amortiguamiento en función de (x_2-x_1)

6.4.10 Influencia de L

Se observa en la figura 6.43 que los valores para los que la capacidad de amortiguamiento se encuentre entre 0 y 100 son valores muy cercanos al inicial.

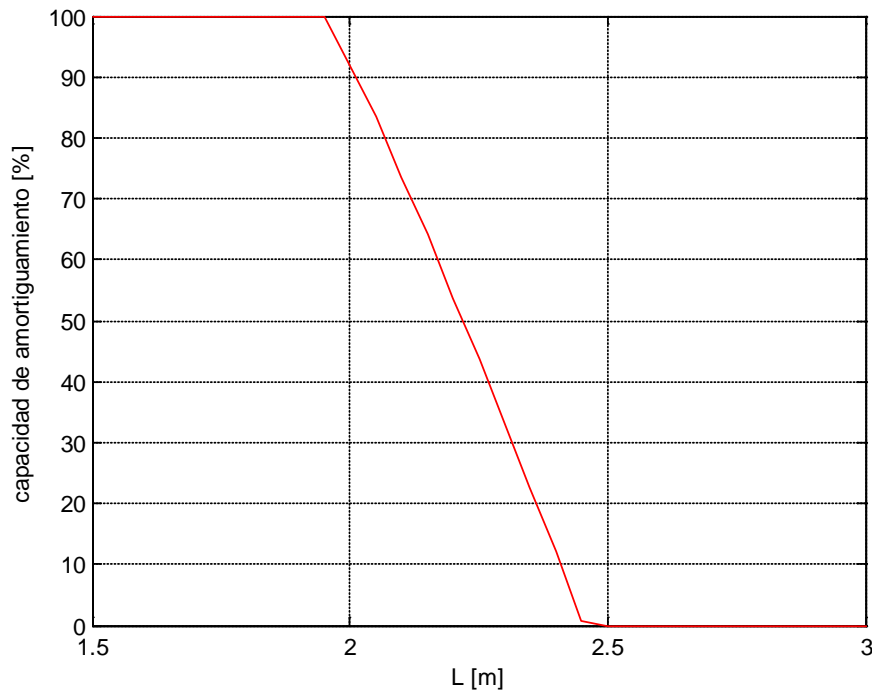


Figura 6.43: Capacidad de amortiguamiento en función de L

6.4.11 Influencia de l

Se muestran valores de amortiguamiento del 100% para valores de l superiores a 5,2 mm

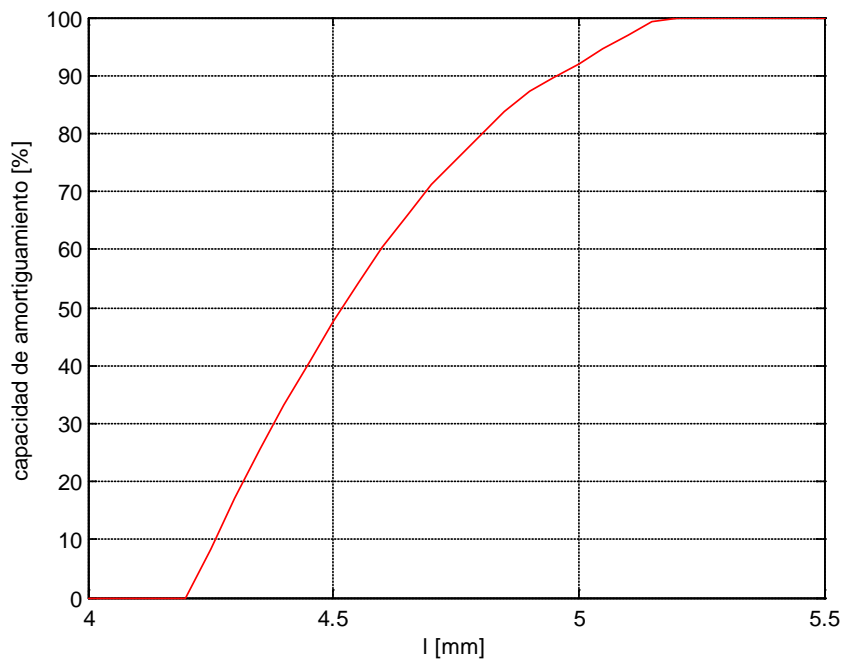


Figura 6.44: Capacidad de amortiguamiento en función de l

6.4.12 Influencia de E

En la figura 6.45 se muestra que un aumento del módulo de elasticidad origina una mayor capacidad de amortiguamiento en la estructura.

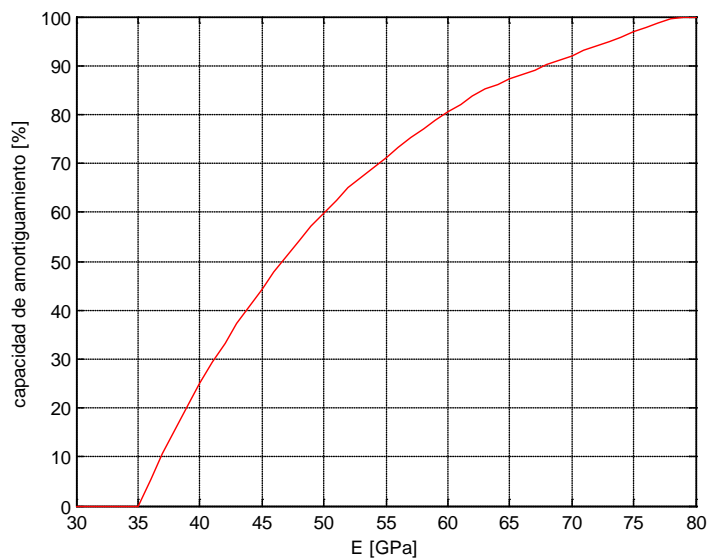


Figura 6.45: Capacidad de amortiguamiento en función de E

6.4.13 Influencia de ρ

Se observa a continuación como de la misma manera que en casos anteriores, la densidad, al aumentar, crea una disminución en su capacidad.

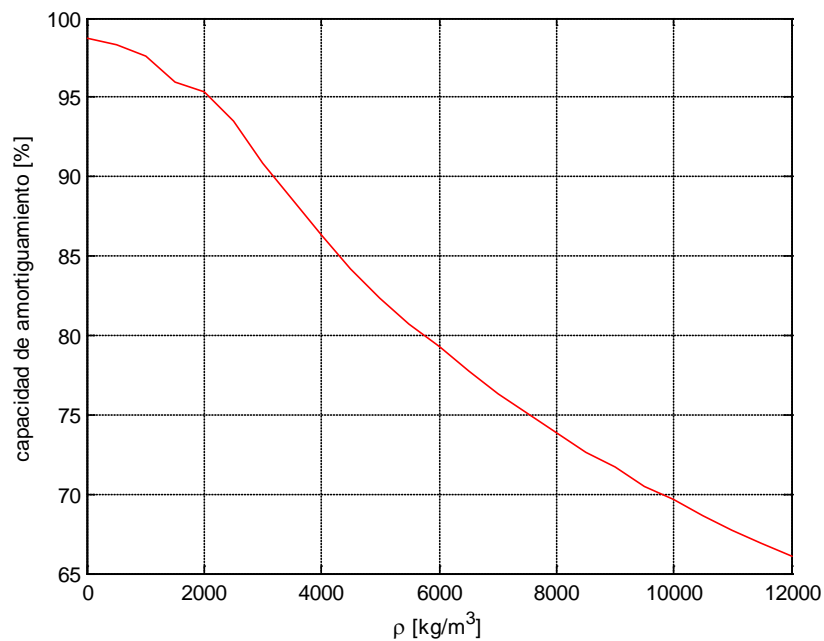


Figura 6.46: Capacidad de amortiguamiento en función de ρ

6.5 . Caso 4: Viga biempotrada

6.5.1. Modos propios no amortiguados

Se procederá a la obtención de los modos propios para una viga empotrada en ambos extremos, con sus condiciones iniciales de contorno.

$$\phi_j(x) = A_j \cdot \cos(\eta_j x) + B_j \cdot \sin(\eta_j x) + C_j \cdot \cosh(\eta_j x) + D_j \cdot \sinh(\eta_j x); \quad \eta^4 = \frac{\rho A}{EI} \cdot \omega_j^2 \quad (6.39)$$

$$w(0,t) = w(L,t) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial w}{\partial x}(L,t) = 0 \quad (6.40)$$

Si se impone que exista una solución no nula, y normalizando la expresión se obtiene:

$$\phi_j = \sqrt{\frac{1}{\rho A L}} [\cos(\eta_j x) - \cosh(\eta_j x) - \beta_j \sin(\eta_j x) + \beta_j \sinh(\eta_j x)] \quad ; \quad \omega_j = \eta_j^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (6.41)$$

Se obtendrá β_j a través de:

$$\beta_j = \frac{\cos(\eta_j L) - \cosh(\eta_j L)}{\sin(\eta_j L) - \sinh(\eta_j L)} \quad (6.42)$$

Donde $\eta_j L$ son las raíces de la ecuación 6.42

$$\sin(\eta_j L) + \sinh(\eta_j L) + \beta_j (\cos(\eta_j L) - \cosh(\eta_j L)) = 0 \quad (6.43)$$

Obteniendo de ella los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \eta_1 L &= 4,7300 \\ \eta_2 L &= 7,3853 \\ \eta_3 L &= 10,9956 \end{aligned}$$

Con los cuales se calculará β :

$$\beta_1 = 0,9825$$

$$\beta_2 = 1,0008$$

$$\beta_3 = 0,9999$$

6.5.2. Solución del problema

A continuación se procede a resolver el problema para una viga biempotrada con amortiguamiento externo e interno, donde se ha elegido un total de 3 términos en la serie de Galerkin, $N=3$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.44)$$

$$K = \begin{pmatrix} 1689,8 & 0 & 0 \\ 0 & 12840 & 0 \\ 0 & 0 & 49346 \end{pmatrix} \quad (6.45)$$

$$C_e = \begin{pmatrix} 11,1201 & 0 & -2,9056 \\ 0 & 5,0531 & 0 \\ -2,9056 & 0 & 2,4986 \end{pmatrix} \quad (6.46)$$

$$C_i = \begin{pmatrix} 69,5790 & 0 & -18,1805 \\ 0 & 240,2453 & 0 \\ -530,9127 & 0 & 456,5529 \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

Ahora se calcula los términos de la ecuación $[D(s)] \cdot \{q(s)\} = \{f(s)\}$:

$$[D(s)] = s^2[M] + sG_e(s)[C_e] + sG_i(s)[C_i] + [K]$$

$$G_e(s) = \frac{30}{s+30} ; G_i(s) = \frac{30}{s+30}$$

$$\{f(s)\} = \frac{1}{s} \cdot \begin{pmatrix} -4,5226 \\ 0 \\ -1,9801 \end{pmatrix}$$

En la figura 6.47 se muestra el desplazamiento del punto medio de la viga en función del tiempo. Se observa la influencia del amortiguamiento con respecto a la no amortiguada.

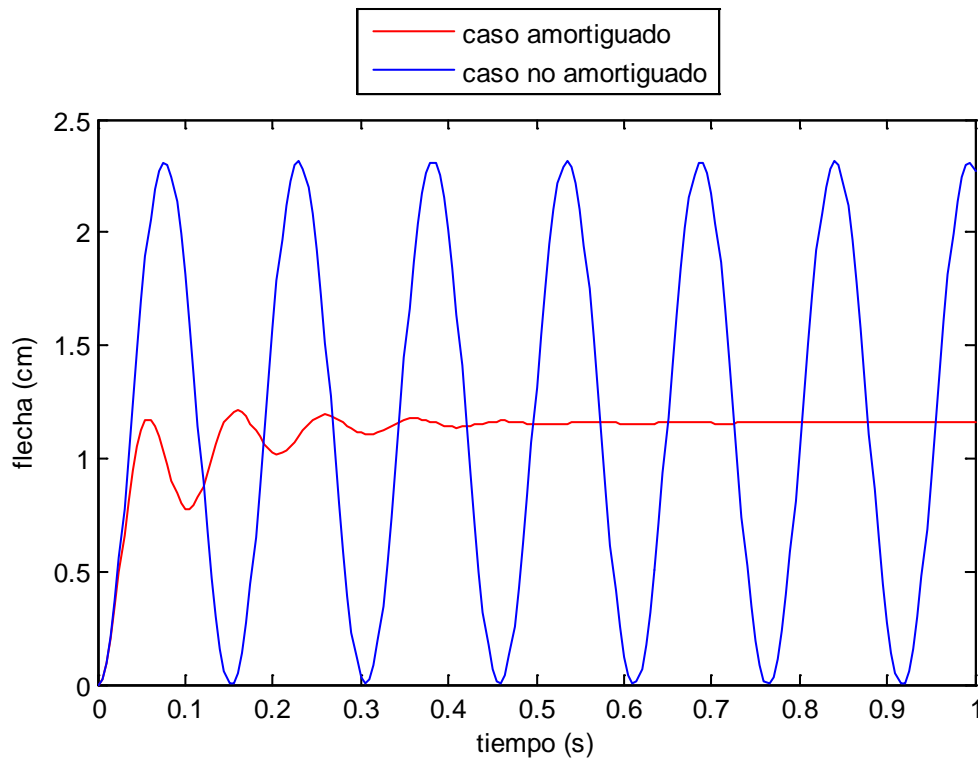


Figura 6.47: Desplazamiento del punto medio para la viga biempotrada

Se procede al cálculo del parámetro η a partir de los datos obtenidos en la gráfica anterior. El valor máximo del caso no amortiguado es $w_{\max}^* = 2,1329 \text{ cm}$, mientras que para el caso amortiguado $w_{\max} = 1,2680 \text{ cm}$. En este caso el desplazamiento de referencia es $w_{\text{ref}} = 1,0664 \text{ cm}$. Con estos datos ya se puede obtener la capacidad de amortiguamiento:

$$\eta \left(x = \frac{L}{2} \right) = \frac{w_{\max}^* - w_{\max}}{w_{\max}^* - w_{\text{ref}}} = \frac{2,1329 - 1,2680}{2,1329 - 1,0664} = 0,903724 \equiv 90,3724\%$$

(6.48)

6.5.3 Influencia de N

Se analiza cómo afecta el número de términos N del método Galerkin, analizando los términos de 2 a 3 y observando como influyen en la figura 6.48:

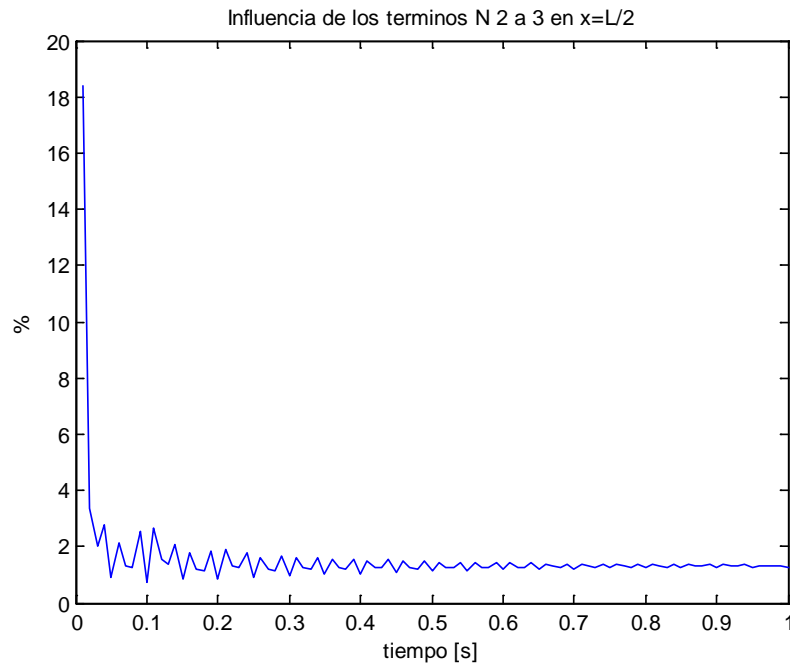


Figura 6.48: Influencia de los términos N 2 a 3 en $x=L/2$

Como se puede observar los términos de 2 a 3 en la viga analizada tienen una influencia muy por debajo del 2% del desplazamiento total, por lo tanto la influencia del primer término será muy notable, por lo que se puede decir que bastaría con analizar este para solucionar el problema.

6.5.4 Influencia de H_0

Las figuras 6.49 y 6.50 muestran la importancia del parámetro H_0 y cómo afecta de distinta forma cuando este actúa en el amortiguamiento interno o externo. Tomemos de ejemplo las líneas de color azul $H_0=0,5$ Ns/m, mientras en el caso de que fuese este valor interno, su capacidad sería máxima con un valor de su homónimo de 6 Ns/m; por el otro lado sería un valor de 1,5 Ns/m, reduciéndose el valor considerablemente.

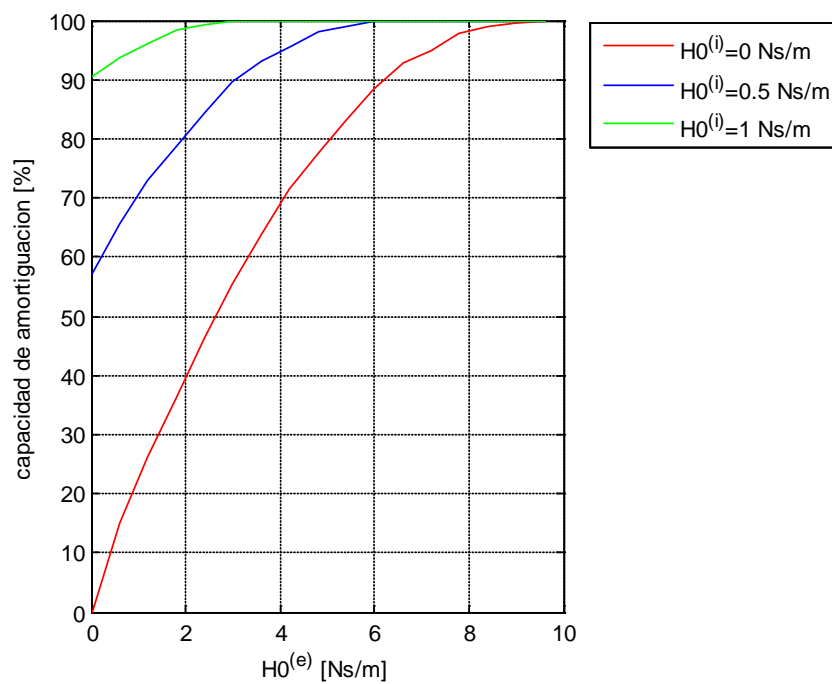


Figura 6.49: Capacidad de amortiguamiento en función de H_0 externo

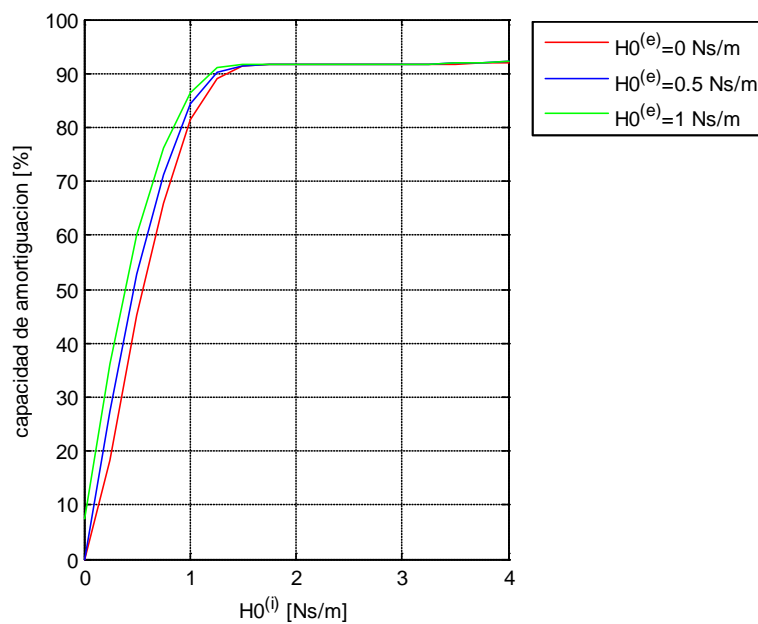


Figura 6.50: Capacidad de amortiguamiento en función de H_0 interno

6.5.5 Influencia de α

Se han obtenido las capacidades de amortiguamiento en función de α , obteniendo los siguientes resultados:

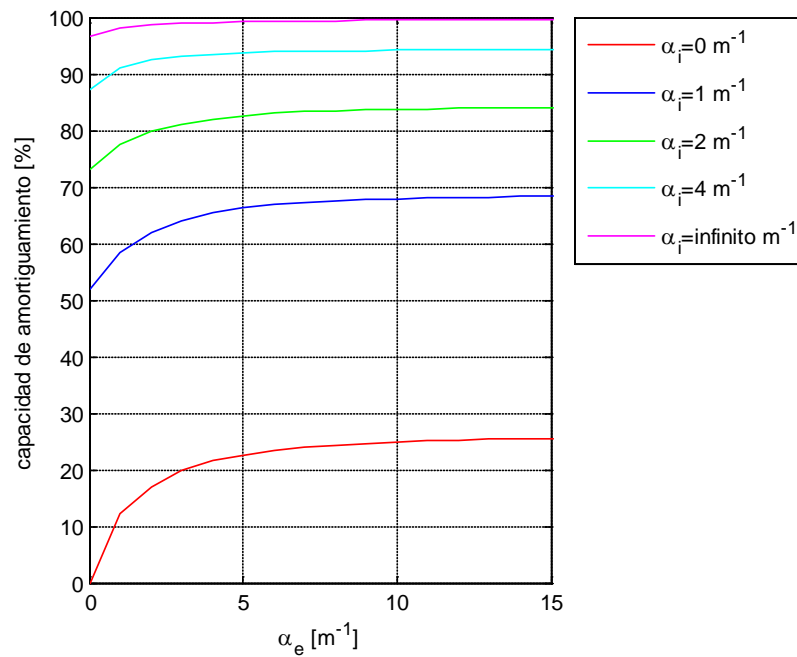


Figura 6.51: Capacidad de amortiguamiento en función de α_e

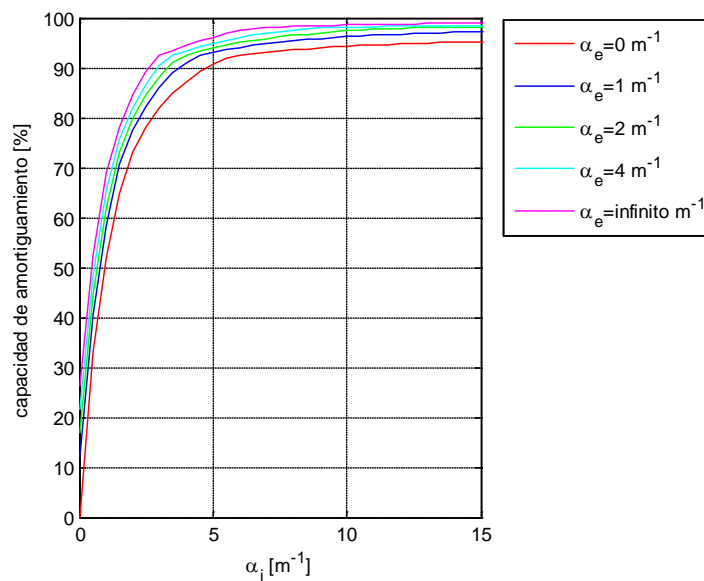


Figura 6.52: Capacidad de amortiguamiento en función de α_i

6.5.6 Influencia de μ

Las figuras 6.53 y 6.54 revelan el comportamiento según μ para los cuales se obtendrán las siguientes capacidades de amortiguamiento, con comportamiento asintótico.

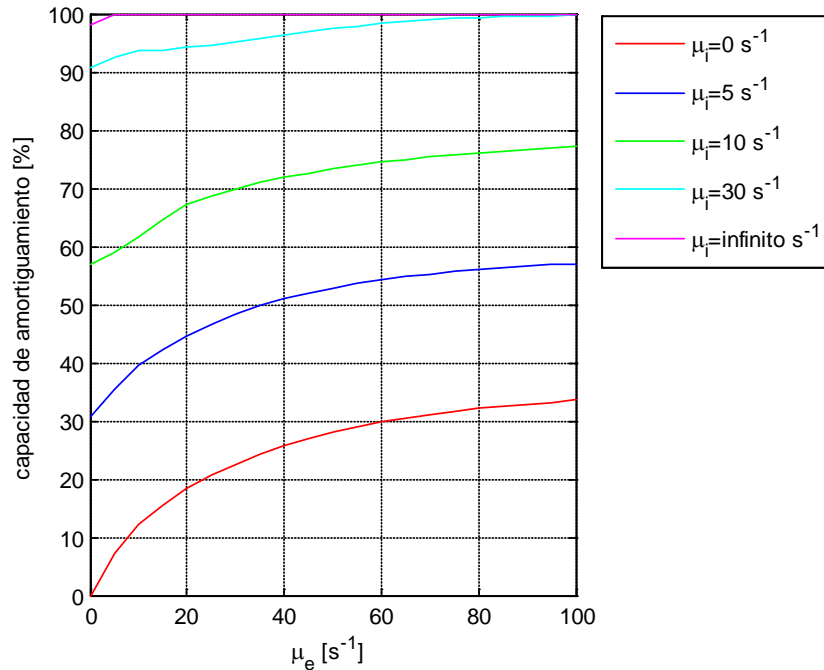


Figura 6.53: Capacidad de amortiguamiento en función de μ_e

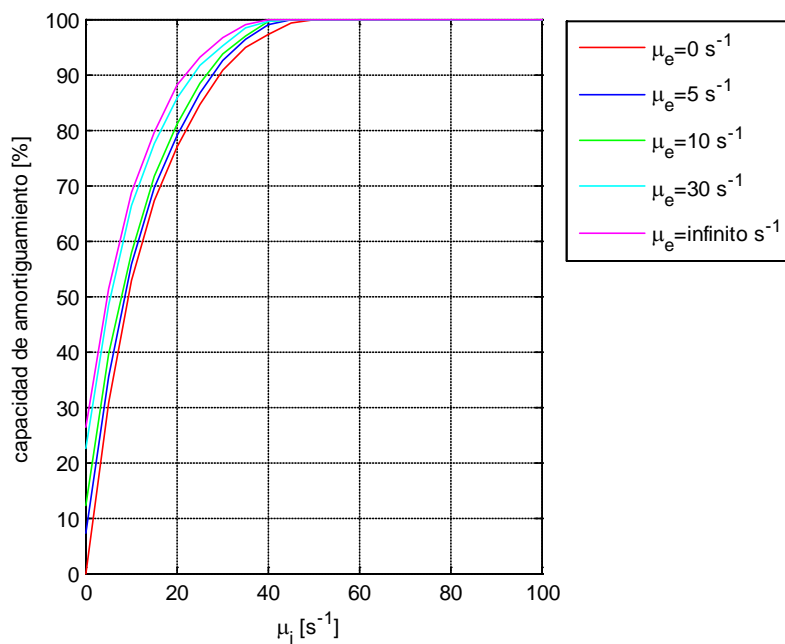


Figura 6.54: Capacidad de amortiguamiento en función de μ_i

6.5.7 Influencia de γ_0

Se obtiene una capacidad de amortiguamiento tal como la que indica la figura 6.55. Cuando variamos el coeficiente de amortiguamiento interno, se aprecia que vuelve a tener valores similares a los obtenidos en el caso anterior.

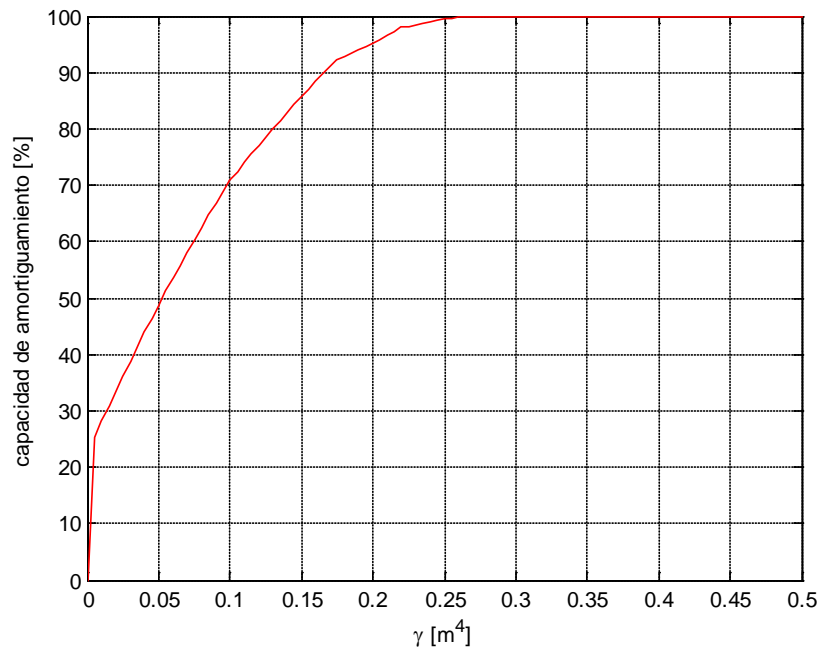


Figura 6.55: Capacidad de amortiguamiento en función de γ_0

6.5.8 Influencia de x_1

Se aprecia, como era de esperar, que existe una simetría en la gráfica, ya que la viga estudiada en este caso también lo es, viga biempotrada. También apreciamos que el valor máximo se encuentra cuando x_1 vale 0,5 m, es decir, el amortiguamiento está centrado, dando como resultado una capacidad de amortiguamiento del 95,1%.

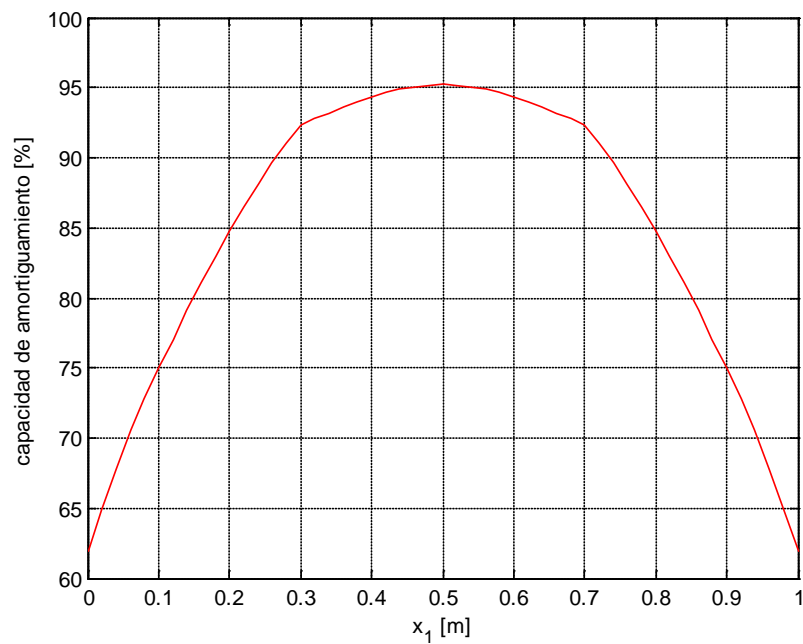


Figura 6.56: Capacidad de amortiguamiento en función de x_1

6.5.9 Influencia de (x_2-x_1)

Resolviendo el problema para distintas longitudes de amortiguamiento se obtienen los datos reflejados en la figura 6.57.

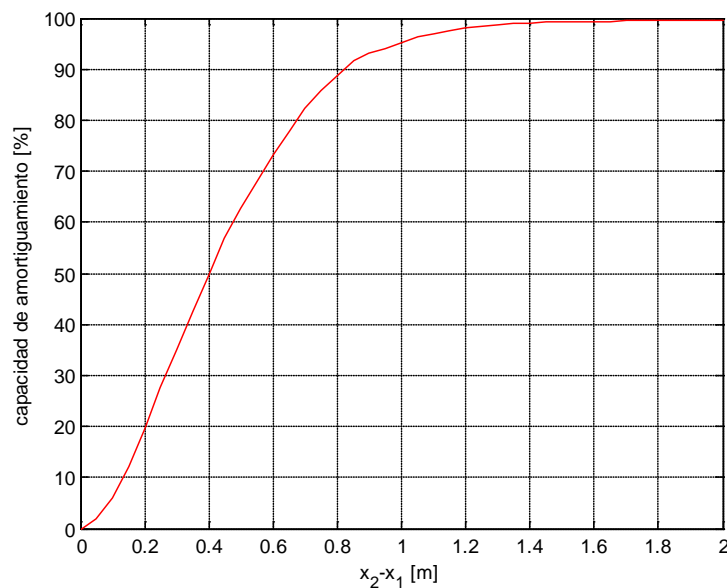


Figura 6.57: Capacidad de amortiguamiento en función de (x_2-x_1)

6.5.10 Influencia de L

Se observa en la figura 6.58 que los valores para los que la capacidad de amortiguamiento se encuentra entre 0 y 100 son valores comprendidos entre 1,9 y 2,4 m.

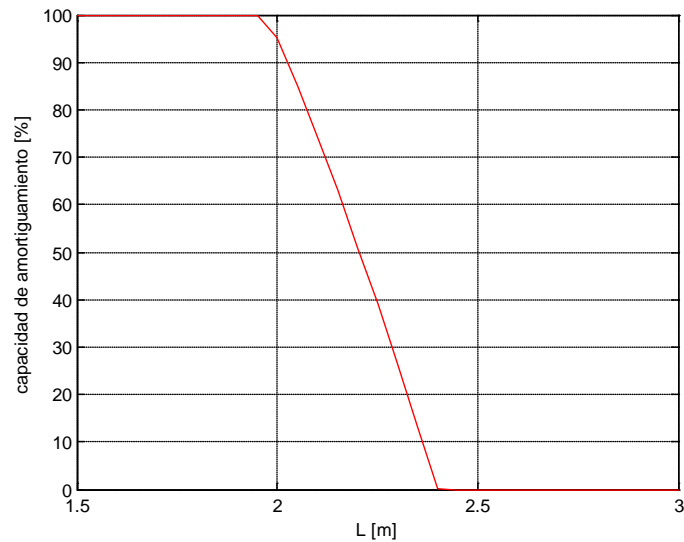


Figura 6.58: Capacidad de amortiguamiento en función de L

6.5.11 Influencia de l

Se observa valores de amortiguamiento del 100% para valores de l superiores a 5,2 mm

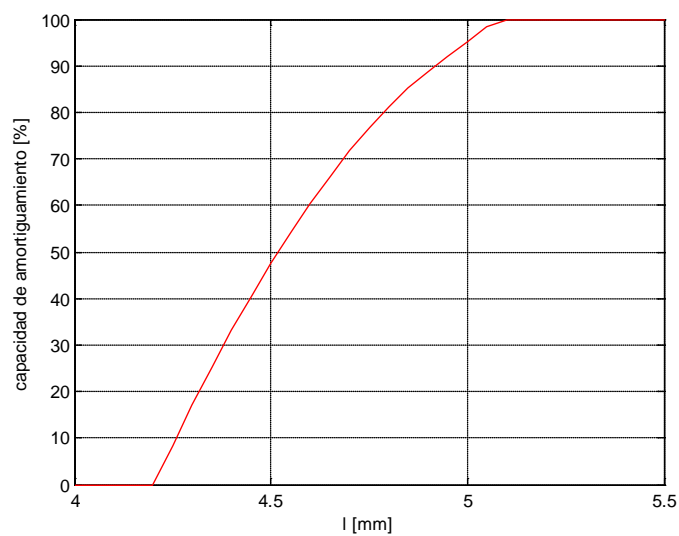


Figura 6.59: Capacidad de amortiguamiento en función de l

6.5.12 Influencia de E

En la figura 6.60 se muestra que un aumento del módulo de elasticidad origina una mayor capacidad de amortiguamiento en la estructura.

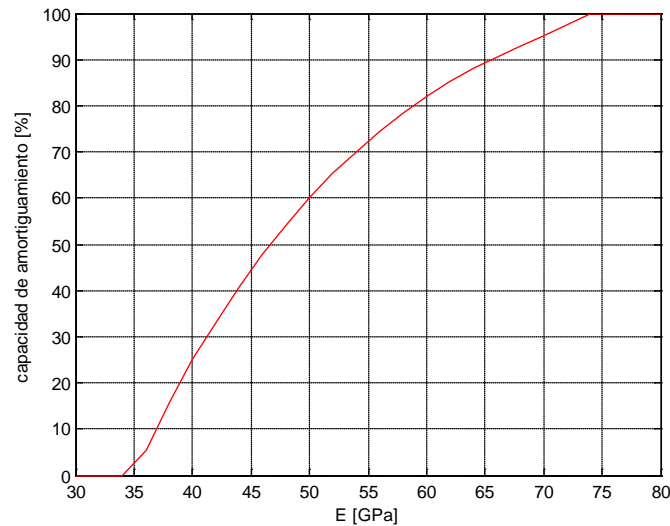


Figura 6.60: Capacidad de amortiguamiento en función de E

6.5.13 Influencia de ρ

Observamos a continuación como de la misma manera que en casos anteriores, la densidad, al aumentar, crea una disminución en su capacidad.

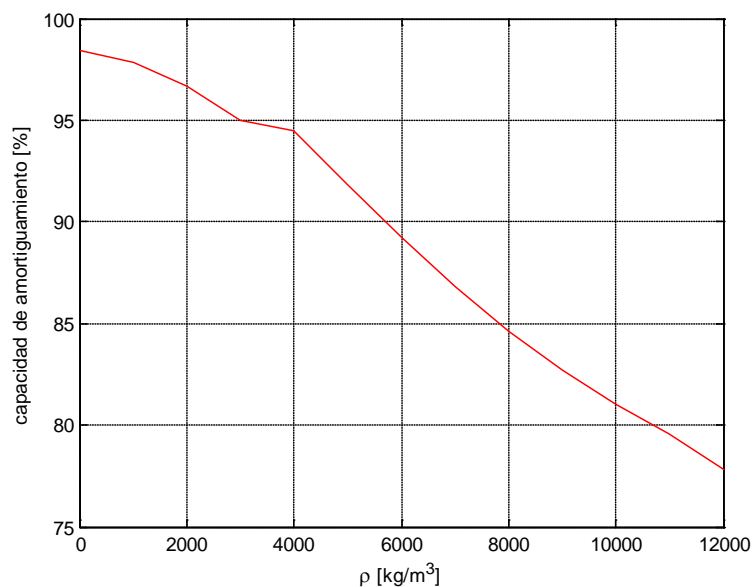


Figura 6.61: Capacidad de amortiguamiento en función de ρ

6.6 . Comparación de resultados

Finalmente, después de haber analizado la influencia de cada parámetro, se va a plasmar los resultados obtenidos y agregar todos los casos, es decir las distintos tipos de vigas con sus condiciones de contorno.

6.6.1. Comportamiento del amortiguador: H_0 , α , μ , γ_0

Para el parámetro H_0 se observan comportamientos parecidos para los casos empotramiento apoyo y la biempotrada. Al ver las graficas 6.62 y 6.63 llama la atención el comportamiento tan distinto que toma el caso de una viga empotrada-libre.

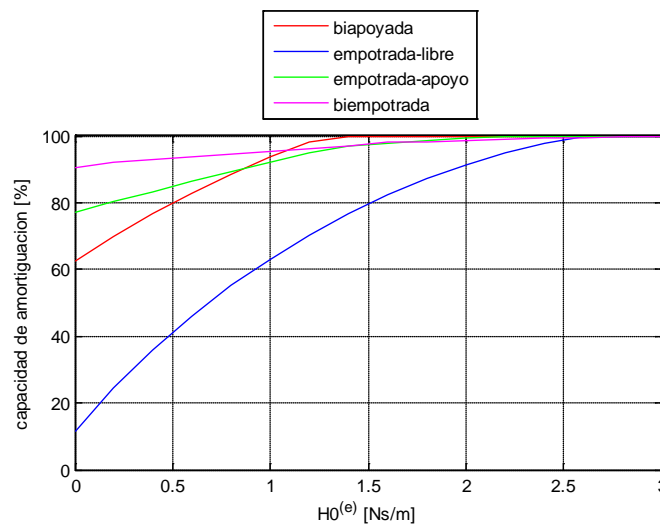


Figura 6.62: Comparación del parámetro H_0 externo

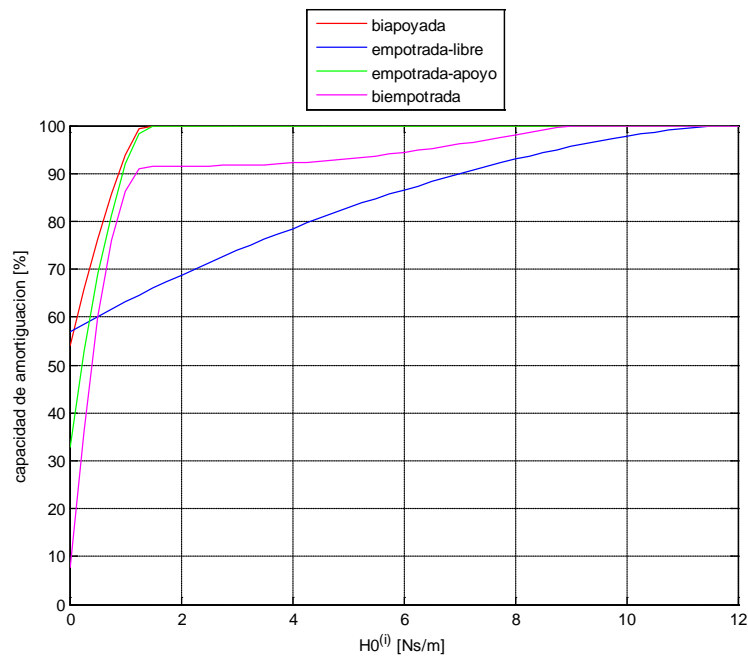


Figura 6.63: Comparación del parámetro H_0 interno

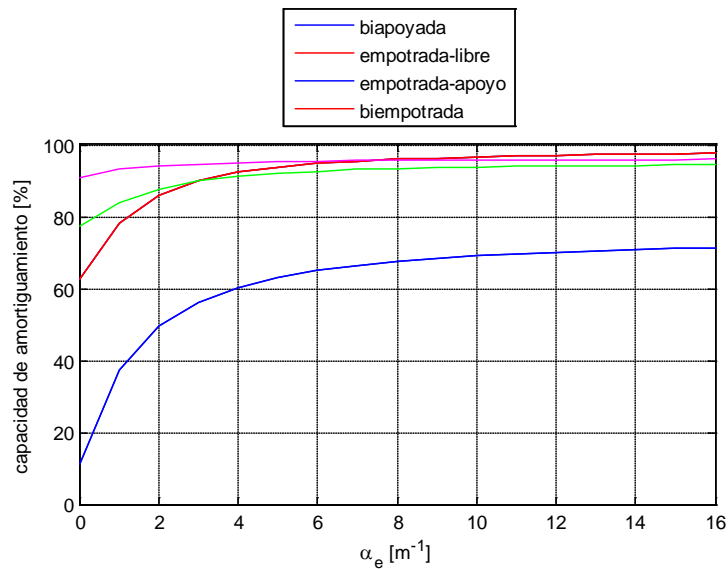


Figura 6.64: Comparación del parámetro αe

Las gráficas 6.64 y 6.65 representan los parámetros relativos al comportamiento amortiguador, a la función de Kernel. Se obtienen capacidades de amortiguamiento para los casos uno, tres y cuatro cercanas a 100%, mientras que para el caso dos, alcanzan valores del proximos del 70%.

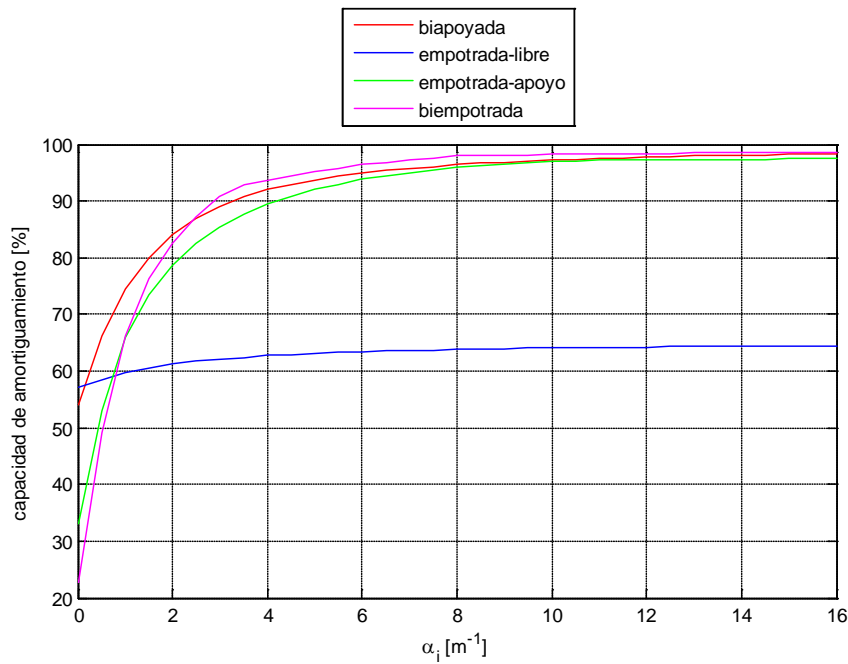


Figura 6.65: Comparación del parámetro α_i

Se compara el parámetro correspondiente a la función de relajación, que tiene un comportamiento similar al de α .

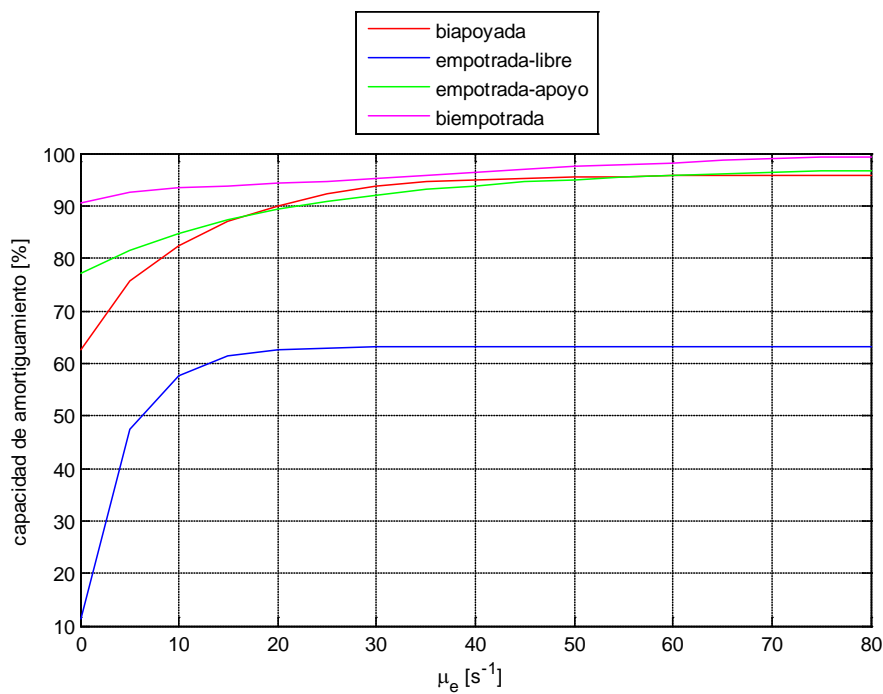


Figura 6.66: Comparación del parámetro μ_e

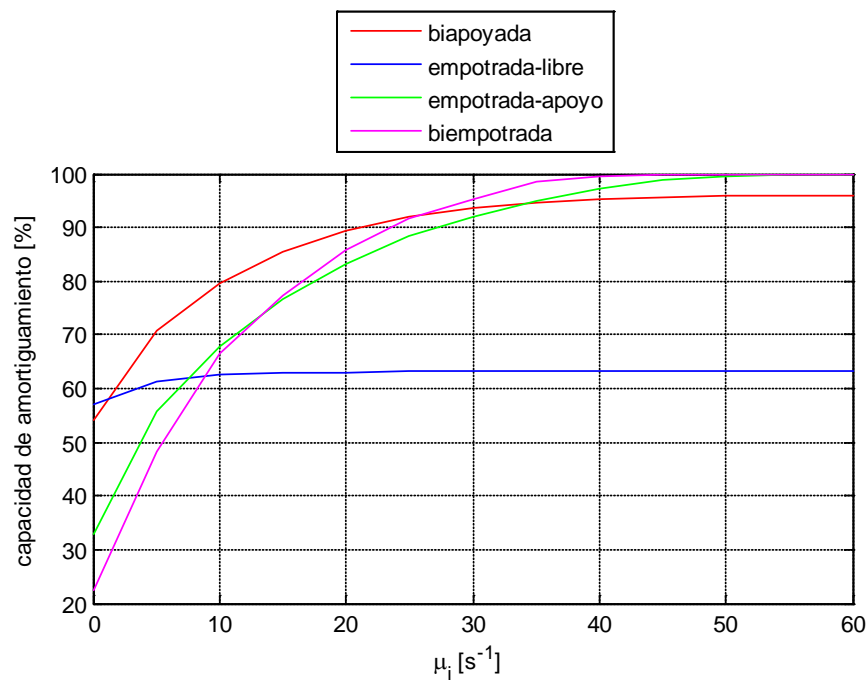


Figura 6.67: Comparación del parámetro μ_i

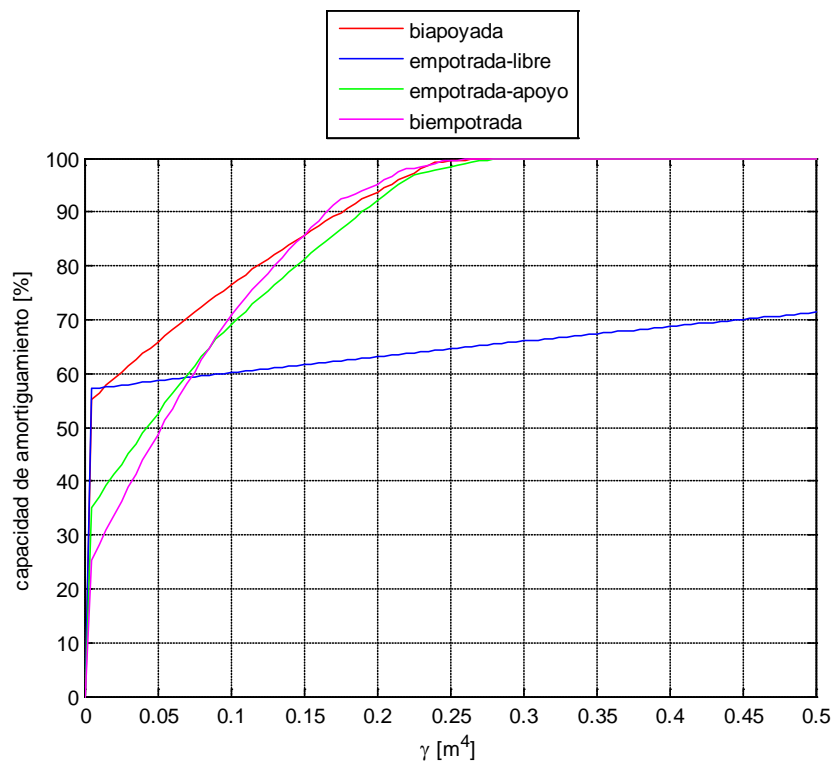


Figura 6.68: Comparación del parámetro γ_0

Se aprecia un patrón cuando aumenta cada parámetro, lo que implica que la capacidad de amortiguamiento aumente, pero se aprecia que hay un caso que se separa del resto, el caso de empotrada-libre. Tanto en externo como en interno se observa como su evolución es más suave con respecto a los otros, este se podría deber a que al ser un voladizo tardara más a la hora de amortiguarse.

6.6.2 Comportamiento en la geometría: x_1 , (x_2-x_1) , L , l

En la figura 6.69 se aprecia cómo la máxima capacidad de amortiguamiento se encontrará en el punto que mayor desplazamiento tenga. En el caso de los casos simétricos el centro de la viga, el de voladizo en el extremo libre, como es de esperar, y en el empotramiento apoyo se encuentra más cerca del apoyo, donde se permite más desplazamiento.

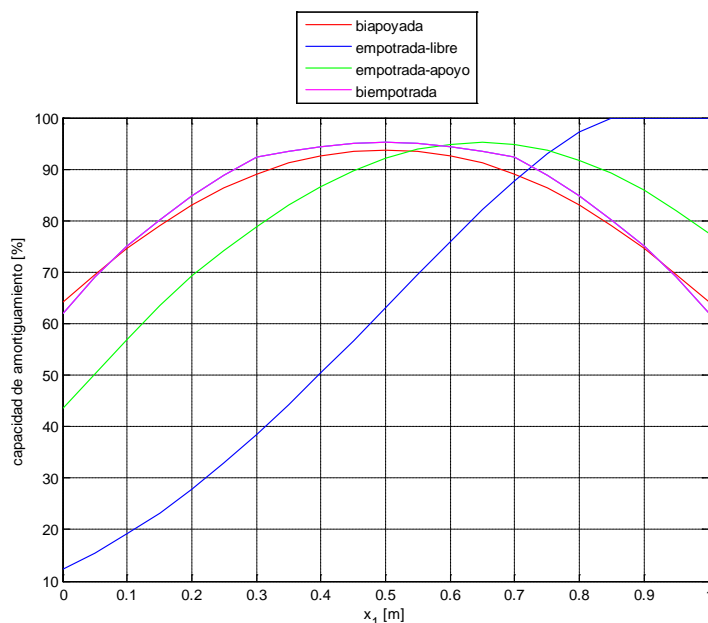


Figura 6.69: Comparación del parámetro x_1

Como ya se ha dicho antes, cuanto mayor sea el tamaño del amortiguamiento mayor será su capacidad para amortiguar, como se observa en la figura 6.70.

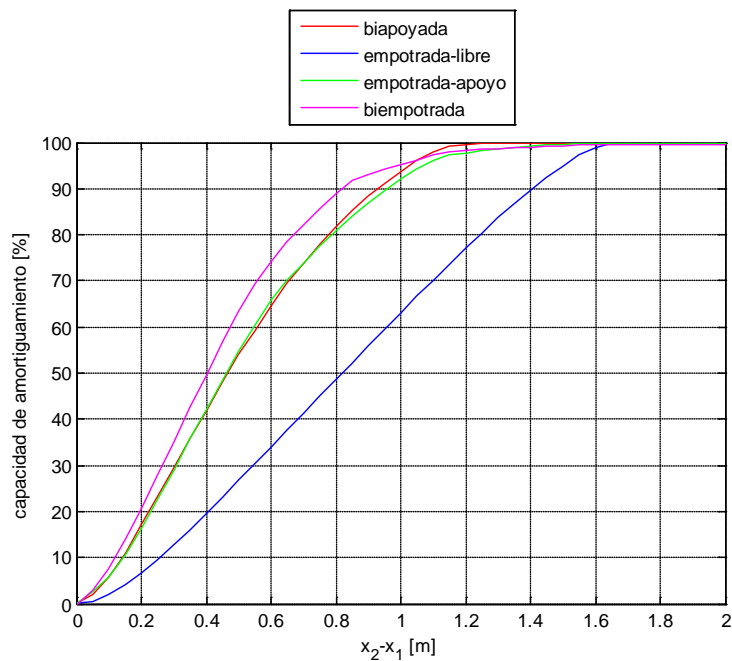


Figura 6.70: Comparación del parámetro ($x_2 - x_1$)

En las figuras 6.71 y 6.72 ocurren fenómenos contrarios, que se explica de la siguiente manera: si se aumenta la longitud de la viga (L) es lógico que el desplazamiento máximo (flecha) sea mayor, lo que implica una disminución de la capacidad de amortiguamiento, caso igual pero contrario que ocurre al modificar la longitud transversal (canto).

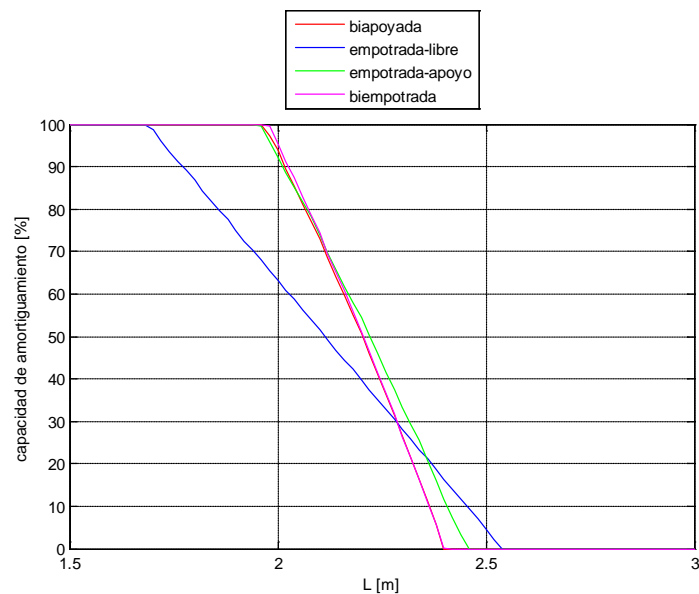


Figura 6.71: Comparación del parámetro L

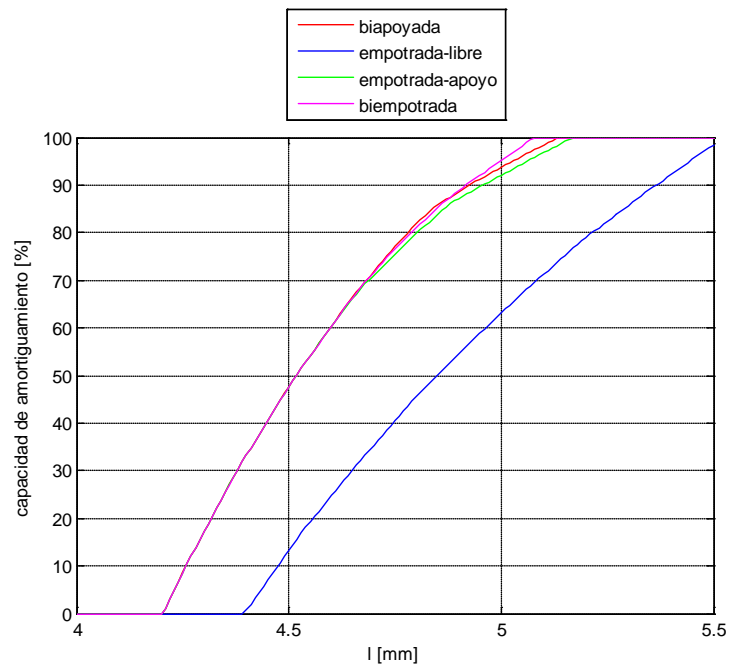


Figura 6.72: Comparación del parámetro l

6.6.3. Comportamiento del material: E , ρ

Se puede observar que un aumento en el módulo de elasticidad, en todos los casos genera aumento en su capacidad de amortiguamiento.

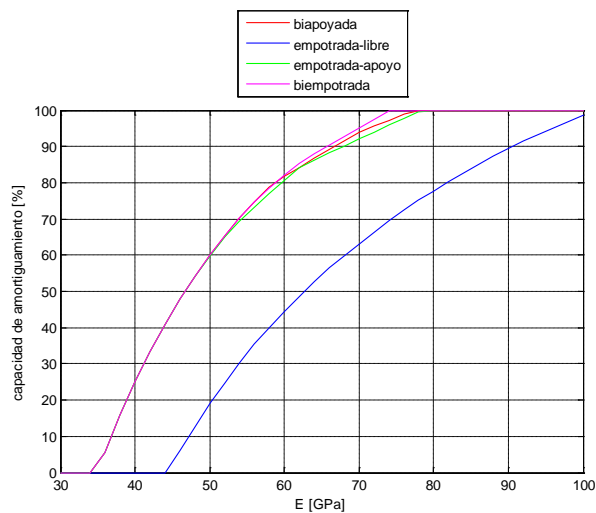


Figura 6.73: Comparación del parámetro E

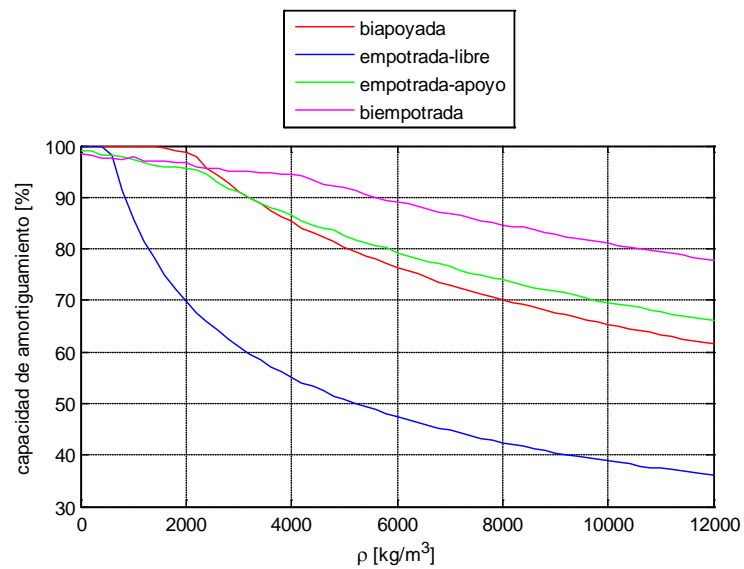


Figura 6.74: Comparación del parámetro ρ

Respecto a la densidad del material como se mencionó antes, al aumentar esta, en la viga habrá menos energía que amortiguar, por eso su capacidad amortiguadora disminuirá.

7 . Conclusiones

Se ha comenzado por explicar las consecuencias de las vibraciones en estructuras y cómo estas se ven afectadas. También se han visto métodos para disiparlas, como pueden ser los materiales viscoelásticos, que se utilizan en nuestro problema.

Se ha continuado por una explicación conceptual de la viscoelasticidad así como los comportamientos de distintos materiales, y modelos amortiguadores, que nos permiten facilitar la disminución de las vibraciones.

En el siguiente capítulo se ha introducido la dinámica de vigas, revelando las distintas condiciones de contorno que nos podemos encontrar, importantes a la hora de sustituir nuestros casos. Se ha podido calcular la ecuación de los modos propios no amortiguados, así como la frecuencia natural de la viga en sus distintos casos expuestos. Se ha deducido la ecuación del movimiento de la viga.

Se ha resuelto el problema por el método de Galerkin a través de una serie de productos de funciones, que requiere de la Transformada de Laplace para la obtención de los desplazamientos.

Una vez obtenida la ecuación matricial en el anterior **capítulo** se ha procedido a resolver casos prácticos, a los cuales se ha dado una serie de valores iniciales estándar. Se han variado los parámetros con el **objetivo de analizar** su influencia sobre la solución.

Con respecto a la carga aplicada, se ha considerado una fuerza unitaria, $F(x,t)=1\text{N/m}$, lo que nos simplifica los cálculos. Además, se ha tomado un punto de aplicación en el centro de la viga, pero se ha deducido que la capacidad de amortiguamiento es independiente de este, por tanto en cualquier punto de la viga será constante η .

Otra conclusión a la que se ha llegado y demostrado es la influencia del número de términos del método Galerkin (N). Se ha observado que el término predominante era el correspondiente a $N=1$, por tanto se ha procedido a solucionar el problema tomando un único término, consiguiendo una gran simplificación. Y se ha procedido a analizar cada parámetro.

Para finalizar, se ha realizado una comparación de cada parámetro calculado para cada caso, lo que ayuda a ver de forma sencilla, como se podrá diseñar un amortiguamiento, y cuáles serán los parámetros óptimos para conseguir mayor capacidad de amortiguamiento.

8 Lineas futuras de investigación

En el presente trabajo se ha resuelto la ecuación de movimiento de una viga con amortiguamiento viscoelástico no local, para poder resolverla se ha realizado simplificaciones, que se podrían evitar en futuros proyectos. Algunas de estas simplificaciones se han realizado en:

En la función de Kernel espacial, en nuestro caso utilizamos el decrecimiento exponencial, se podría investigar qué diferencias habría si se utilizase para los cálculos alguna de las otras explicadas en este proyecto.

Se ha mantenido la sección de la viga, por lo que se podría modificar esta. Utilizando vigas rectangulares, o incluso vigas de uso comercial como IPN, HEB, etc..

El coeficiente de amortiguamiento interno γ se ha tomado constante, se debería analizar su influencia si este no lo fuera, que dependiera del punto de estudio.

Otra vía de investigación podría ser el análisis de una placa en vez de una viga, lo que implicaría ecuaciones en función de áreas y no de longitudes.

9 Bibliografía

A Galerkin method for distributed systems with non-local damping. Y Lei, S. Adhikari, M.I. Friswell. International Journal of Solids and Structures 43 (2006)

Mechanical Vibrations. Rao, S.S., Adison-Wesley (1995)

Dinamica estructural: Teoría y Cálculo. M. Paz (1992)

Dynamic of non-viscously damped beams. S. Adhikari, Y. Lei, M.I. Friswell, Journal of Applied Mechanics, submitted for publication.

Proyecto Fin de Carrera: Dinámica de vigas con amortiguamiento no local. Sergio González López. (2009)

Guia de Matlab para Ingeniería Mecánica. A. Cubillos Varela. Ibague (2007)